



# VIỄN TẢI LƯỢNG TỬ VỚI TRẠNG THÁI CON MÈO KẾT CẶP ĐIỆN TÍCH

Đặng Hữu Định\*, Trương Minh Đức

Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế

**Tóm tắt:** Trong bài báo này, chúng tôi khảo sát tính chất đan rối của trạng thái con mèo kết cặp điện tích dựa trên hàm entropy tuyến tính. Chúng tôi sử dụng trạng thái này để viễn tải một trạng thái kết hợp theo hai cách đo khác nhau ở bên người gửi bằng cách đo đồng thời các biên độ trực giao và đo đồng thời tổng số hạt và hiệu pha. Kết quả khảo sát độ trung thực cho thấy rằng trạng thái con mèo kết cặp điện tích chuẩn phù hợp hơn cho việc viễn tải theo cách đo các biên độ trực giao. Tuy nhiên, theo phép đo đồng thời tổng số hạt và hiệu pha thì hai trạng thái con mèo kết cặp điện tích chuẩn và lẻ đều phù hợp cho quá trình viễn tải trạng thái kết hợp biên độ bé.

**Từ khóa:** trạng thái con mèo kết cặp điện tích, độ trung thực, viễn tải lượng tử

## 1 Giới thiệu

Trong những năm gần đây, các trạng thái phi cổ điển của trường bức xạ đã được nghiên cứu cả về lý thuyết lẫn thực nghiệm. Tính chất phi cổ điển của các trạng thái phi cổ điển đóng vai trò quan trọng trong việc sử dụng có hiệu quả ở các lĩnh vực khoa học khác nhau, đặc biệt trong quang lượng tử, thông tin lượng tử và máy tính lượng tử. Các trạng thái kết hợp cộng một photon lần đầu tiên đã được tạo ra và các tính chất phi cổ điển của các trạng thái kết hợp cặp đã được khảo sát [1]. Tuy nhiên, tất cả các trạng thái lượng tử được giới thiệu trước đó không tích điện. Các trạng thái kết hợp điện tích là các trạng thái riêng của cặp toán tử hủy boson và toán tử điện tích [2], chúng không chỉ quan trọng trong nghiên cứu cơ học lượng tử cơ bản, mà còn hữu dụng trong xử lý thông tin lượng tử. Các trạng thái kết hợp điện tích được định nghĩa [3] như là trạng thái riêng của cặp toán tử hủy boson  $\hat{a}\hat{b}$  và toán tử điện tích  $\hat{Q} = \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{b}^\dagger \hat{b}$  như sau

$$\hat{Q}|\xi, q\rangle_{ab} = q|\xi, q\rangle_{ab}, \quad \hat{a}\hat{b}|\xi, q\rangle_{ab} = \xi|\xi, q\rangle_{ab}, \quad (1)$$

trong đó  $|\xi, q\rangle_{ab}$  là các trạng thái kết hợp điện tích của hai mode  $a$  và  $b$ , với  $q$  là một số nguyên được gọi là số điện tích. Giả sử rằng số photon ở mode  $a$  lớn hơn số photon ở mode  $b$ . Do đó, số điện tích  $q \geq 0$ . Dưới dạng các trạng thái Fock, các trạng thái kết hợp điện tích hai mode được cho bởi

\* Liên hệ: [danghuudinh68@gmail.com](mailto:danghuudinh68@gmail.com)

$$|\xi, q\rangle_{ab} = \mathcal{N}_q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{\sqrt{(n!(n+q)!)}} |n+q, n\rangle_{ab}, \quad (2)$$

trong đó  $|m, n\rangle_{ab}$  là các trạng thái Fock hai mode  $a$  và  $b$

$$\mathcal{N}_q = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{n!(n+q)!} \right)^{-1/2}. \quad (3)$$

Trạng thái con mèo kết cặp điện tích (Charge Pair Cat State: CPCS) đã được định nghĩa trong [4] như là sự chồng chập của cặp trạng thái kết hợp điện tích, nghĩa là

$$|\xi, q, \phi\rangle_{ab} = \mathcal{N}_{\phi} (|\xi, q\rangle_{ab} + e^{i\phi} |-\xi, q\rangle_{ab}). \quad (4)$$

Các trạng thái con mèo kết cặp điện tích được cho dưới dạng các trạng thái Fock

$$|\xi, q, \phi\rangle_{ab} = \mathcal{N}_{\phi, q} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n [1 + (-1)^n e^{i\phi}]}{\sqrt{n!(n+q)!}} |n+q\rangle_a |n\rangle_b, \quad (5)$$

trong đó  $\mathcal{N}_{\phi, q}$  là hệ số chuẩn hóa

$$\mathcal{N}_{\phi, q}^{-2} = (\mathcal{N}_{\phi} \mathcal{N}_q)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2r^{2n} [1 + (-1)^n \cos \phi]}{n!(n+q)!}, \quad (6)$$

với  $\xi = re^{i\theta}$ ,  $r$  và  $\theta$  là những số thực. Trường hợp khi  $\phi = 0$ , chúng ta thu được trạng thái con mèo kết cặp điện tích chẵn (Even CPCS: ECPCS)

$$|\xi, q, \phi\rangle_{ab}^{(e)} = \mathcal{N}_{\phi, q}^{(e)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{2n}}{\sqrt{(2n)!(2n+q)!}} |2n+q\rangle_a |2n\rangle_b. \quad (7)$$

Khi  $\phi = \pi$ , chúng ta có trạng thái con mèo kết cặp điện tích lẻ (Odd CPCS: OCPCS)

$$|\xi, q, \phi\rangle_{ab}^{(o)} = \mathcal{N}_{\phi, q}^{(o)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{2n+1}}{\sqrt{(2n+1)!(2n+1+q)!}} |2n+1+q\rangle_a |2n+1\rangle_b. \quad (8)$$

Hệ số chuẩn hóa  $\mathcal{N}_{\phi, q}^{(e)}$  và  $\mathcal{N}_{\phi, q}^{(o)}$  có dạng

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\phi, q}^{(e)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{4n}}{(2n)!(2n+q)!} |2n+q\rangle_a |2n\rangle_b, \\ \mathcal{N}_{\phi, q}^{(o)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{4n+2}}{(2n+1)!(2n+1+q)!} |2n+1+q\rangle_a |2n+1\rangle_b. \end{aligned} \quad (9)$$

Vai trò của các trạng thái đan rối hai mode đã được chỉ ra trong nhiều lĩnh vực của thông tin lượng tử như viễn tải lượng tử, tính toán lượng tử, mã hóa lượng tử, viễn tạo trạng thái, ví

dụ như trạng thái nén chân không hai mode [7], trạng thái kết hợp cặp [8]. Để thực hiện các nhiệm vụ này, các trạng thái hai mode của trường lượng tử phải là những trạng thái đan rối. Một trạng thái với hiệu ứng đan rối càng mạnh sẽ cho mức độ thành công của các nhiệm vụ lượng tử càng cao. Dĩ nhiên là mức độ thành công còn phụ thuộc vào từng trạng thái với các mô hình thực hiện phù hợp với nó [7, 9], sự ảnh hưởng của tính chất phá kết hợp [9, 10]... Trong phần tiếp theo, chúng ta sẽ đánh giá tính chất đan rối của CPCS.

## 2 Khảo sát tính đan rối

Trạng thái kết hợp điện tích chẵn và lẻ là một trường hợp đặc biệt của trạng thái CPCS, tính chất đan rối của trạng thái kết hợp điện tích chẵn và lẻ đã được khảo sát [11], trong đó các tác giả đã sử dụng tiêu chuẩn đan rối của Hillery và Zubairy. Kết quả của [11] cho thấy trạng thái kết hợp điện tích chẵn và lẻ có tính chất đan rối, cấp độ mạnh hay yếu của đan rối giữa các mode trong trạng thái này chưa được khảo sát. Để đánh giá cấp độ đan rối của CPCS, chúng tôi dùng tiêu chuẩn đan rối mới của Agarwal và Biswas [12]. Theo định nghĩa, hàm entropy tuyến tính có dạng

$$M = 1 - \text{Tr}(\hat{\rho}^2), \quad (10)$$

trong đó  $\text{Tr}(\hat{\rho}^2)$  là vết của ma trận mật độ bình phương. Một trạng thái đan rối càng mạnh nếu  $M$  càng gần đơn vị. Trạng thái đan rối cực đại khi  $M = 1$ , trường hợp  $M = 0$  tương ứng với trạng thái không đan rối. Với các CPCS, ta có

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= |\xi, q, \phi\rangle_{ab} \langle \xi, q, \phi|_{ab} \\ &= \mathcal{N}_{\phi, q}^2 \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{\xi^n (\xi^*)^m [1 + (-1)^n e^{i\phi}] [1 + (-1)^m e^{-i\phi}]}{\sqrt{m!n!(m+q)!(n+q)!}} |n+q\rangle_a |n\rangle_b \langle m|_a \langle m+q|. \end{aligned} \quad (11)$$

Khi đó

$$\hat{\rho}_a = 2\mathcal{N}_{\phi, q}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n} [1 + (-1)^n \cos \phi]}{n!(n+q)!} |n+q\rangle_a \langle n+q|. \quad (12)$$

Từ đó ta suy ra

$$\hat{\rho}_a^2 = 4\mathcal{N}_{\phi, q}^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{4n} [1 + (-1)^n \cos \phi]^2}{[n!(n+q)!]^2} |n+q\rangle_a \langle n+q| \quad (13)$$

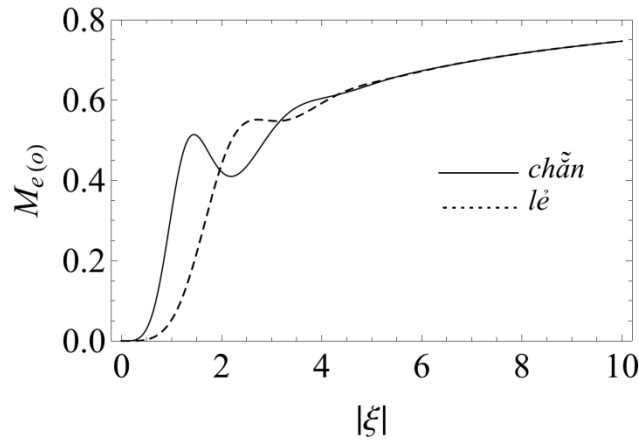
và chúng ta nhận được kết quả cuối cùng là

$$M = 1 - \text{Tr}(\hat{\rho}_a^2) = 1 - 4\mathcal{N}_{\phi, q}^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{4n} [1 + (-1)^n \cos \phi]^2}{[n!(n+q)!]^2}. \quad (14)$$

Xét trường hợp  $q = 0$ , điều này có nghĩa là số photon trong mode  $a$  bằng số photon trong mode  $b$ , ta có

$$M = 1 - 4N_{\phi,0}^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{4n} [1 + (-1)^n \cos \phi]^2}{[n!]^4}. \tag{15}$$

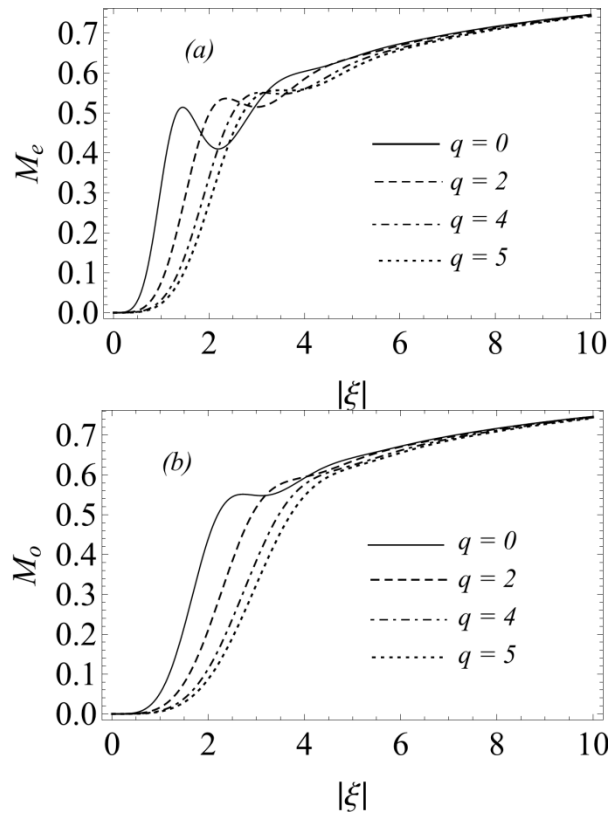
Khảo sát hàm entropy tuyến tính cho ECPCS ( $\phi = 0$ ) và OCPCS ( $\phi = \pi$ ) với  $q = 0$ , kết quả thu được thể hiện trên Hình 1.



**Hình 1.** Sự phụ thuộc của  $M_{e(\phi)}$  vào  $|\xi|$  với  $q = 0$ . Đường liền nét ứng với ECPCS ( $\phi = 0$ ) và đường đứt nét ứng với OCPCS ( $\phi = \pi$ )

Kết quả Hình 1 cho thấy ECPCS và OCPCS đều là những trạng thái đan rối. Mức độ đan rối tăng theo giá trị của biên độ  $|\xi|$ . Tuy nhiên, có thể nói rằng tính đan rối của chúng đủ mạnh khi biên độ  $|\xi|$  đạt đến giá trị đủ lớn và lúc này mức độ đan rối của ECPCS và OCPCS có giá trị gần bằng nhau. Gọi  $|\xi|_1$  là giá trị biên độ vừa đủ lớn để cho mức độ đan rối của ECPCS và OCPCS bắt đầu xấp xỉ bằng nhau, khi đó độ chênh lệch về mức độ đan rối của ECPCS và OCPCS càng tăng khi  $|\xi|_1$  lùi dần về 0. Khảo sát hàm entropy tuyến tính cho trường hợp ECPCS ( $\phi = 0$ ) và OCPCS ( $\phi = \pi$ ) khi  $q = 0, 2, 4, 5$  với kết quả được thể hiện trên Hình 2(a) và 2(b). Mức độ đan rối lúc này luôn tồn tại với bất kỳ giá trị nào của số điện tích  $q \geq 0$ . Nếu  $|\xi|$  đủ lớn thì mức độ đan rối sẽ tăng theo giá trị của  $|\xi|$  và trong cả hai trạng thái có mức độ đan rối cực đại xấp xỉ bằng nhau (gần bằng 1) khi  $|\xi|$  đạt gần một giá trị tới hạn  $|\xi|_2$ . Trong giới hạn giá trị bé của  $|\xi|$ , mức độ đan rối xét cho hai trạng thái cũng thay đổi theo  $q$  và tại  $|\xi| = 0$  mức độ đan rối cho cả hai trạng thái đạt cực tiểu. Thực hiện việc khảo sát số bằng phần mềm Mathematica, khi giữ nguyên giá trị của  $|\xi| = 5$ ,  $\phi = 0(\pi)$  theo thứ tự các giá trị số điện tích  $q = 0, 2, 4, 5$  thu được  $M = 0,63921$  (0,643115), 0,638614 (0,634793), 0,623999 (0,624541), 0,611858 (0,619544); trường hợp giữ nguyên giá trị  $|\xi| = 180$ ,  $\phi = 0(\pi)$  ta có  $M = 0,938925$  (0,938 465), 0,939292 (0,938923), 0,939581 (0,939288), 0,9397 (0,93944). Số liệu cho thấy khi  $|\xi|$  lớn sự sai khác nhau về giá trị hàm entropy tuyến tính theo các giá trị số điện tích khác nhau là rất ít. Điều này đồng nghĩa rằng khi biên độ kết hợp lớn đến một giá trị tới hạn  $|\xi|_2$

nào đó, giá trị hàm entropy tuyến tính theo các giá trị số điện tích khác nhau sẽ hội tụ về cùng một giá trị cực đại. Kết quả cũng cho thấy mức độ biểu hiện đan rối giữa ECPCS và OCPCS là tương tự nhau, khi biên độ  $|\xi|$  đủ lớn, giá trị hàm entropy tuyến tính của cả hai trạng thái này gần như bằng nhau. Như vậy, CPCS là một trạng thái đạt đến mức độ đan rối cực đại khi  $|\xi|$  đạt đến một giá trị tới hạn và nó thỏa mãn điều kiện đan rối cho việc thực hiện các nhiệm vụ lượng tử. Ngay sau đây, quá trình viễn tải lượng tử một trạng thái kết hợp khi sử dụng CPCS làm nguồn rối sẽ được khảo sát một cách chi tiết.



**Hình 2.** Sự phụ thuộc của  $M_e$  trong ECPCS ( $\phi = 0$ ) ở hình (a) và  $M_o$  trong OCPCS ( $\phi = \pi$ ) ở hình (b) vào  $|\xi|$ . Các đường liền nét, đường đứt nét, đường chấm gạch và đường chấm chấm lần lượt ứng với  $q = 0, 2, 4, 5$

### 3 Viễn tải lượng tử với trạng thái con mèo kết cặp điện tích

Mô hình viễn tải lượng tử lần đầu tiên được Bennet cùng cộng sự đưa ra cho biến rời rạc [13]. Mô hình tiếp tục được phát triển cho viễn tải lượng tử biến liên tục với trạng thái hai mode, ba mode và đa mode. Quá trình viễn tải lượng tử với trạng thái con mèo kết cặp và đánh giá ảnh hưởng của sự phá vỡ kết hợp lên độ trung thực trung bình cũng đã được Li cùng cộng sự nghiên cứu [10]. Các tác giả đã sử dụng mô hình đo tổng số hạt và hiệu số pha theo [9], kết

quả cho thấy mô hình viễn tải thành công một trạng thái con mèo kết cặp và một trạng thái kết hợp với biên độ bé. Trong phần này, chúng tôi khảo sát quá trình viễn tải sử dụng CPCS theo hai cách đo khác nhau: đo đồng thời tổng và hiệu các biên độ trực giao, đo đồng thời tổng số hạt và hiệu pha. Trên cơ sở đó, chúng tôi xét tới ảnh hưởng của các tham số lên mức độ thành công của quá trình viễn tải. Trong cả hai trường hợp, chúng tôi thực hiện viễn tải một trạng thái kết hợp  $|\alpha\rangle_c$  của mode  $c$ .

### 3.1 Viễn tải lượng tử sử dụng cách đo tổng và hiệu các biên độ trực giao

Giả sử Alice và Bob cùng chung một CPCS, mode  $a$  được gửi tới Alice, mode  $b$  được gửi tới Bob, Alice muốn gửi cho Bob một trạng thái kết hợp  $|\alpha\rangle_c$ . Mô hình chúng tôi sử dụng đã được nêu trong [14]. Trạng thái hệ vào bây giờ là

$$|\Phi_{in}\rangle = |\xi, q, \phi\rangle_{ab} |\alpha\rangle_c = \mathcal{N}_{\phi, q} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n [1 + (-1)^n e^{i\phi}]}{\sqrt{n!(n+q)!}} |n+q\rangle_a |n\rangle_b |\alpha\rangle_c. \quad (16)$$

Alice thực hiện phép đo đồng thời tổng và hiệu các biên độ trực giao trên hai mode  $a$  và  $c$ , theo [14] trạng thái riêng tương ứng với các trị riêng đo được có dạng

$$|\beta\rangle_{a,c} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \hat{D}_c(\beta) |j\rangle_a |j\rangle_c, \quad (17)$$

trong đó  $\hat{D}_c(\beta)$  là toán tử dịch chuyển tác dụng lên mode  $c$ ,  $\beta$  là một số phức và  $\beta = x_- + iy_+$ ,  $x_-, y_+$  là các giá trị riêng cần đo, thỏa mãn

$$\hat{x}_- |\beta_{a,c}\rangle = \text{Re}(\beta) |\beta_{a,c}\rangle, \quad (18)$$

$$\hat{y}_+ |\beta_{a,c}\rangle = \text{Im}(\beta) |\beta_{a,c}\rangle. \quad (19)$$

Sau phép đo này, trạng thái chưa chuẩn hóa giữa Alice và Bob trở thành

$$|\Phi(\beta)\rangle_b = \frac{\mathcal{N}_{\phi, q}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n, j=0}^{\infty} \frac{\xi^n [1 + (-1)^n e^{i\phi}]}{\sqrt{n!(n+q)!}} |n\rangle_{ba} \langle j | n+q\rangle_{ac} \langle j | \hat{D}_c(-\beta) | \alpha\rangle_c. \quad (20)$$

Sử dụng tính chất trực giao của trạng thái Fock và cũng như của toán tử dịch chuyển chúng ta viết được trạng thái sau khi Alice thực hiện phép đo như sau

$$|\Phi(\beta)\rangle_b = \frac{\mathcal{N}_{\phi, q} e^{-|\alpha-\beta|^2/2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n [1 + (-1)^n e^{i\phi}] (\alpha - \beta)^{n+q}}{(n+q)! \sqrt{n!}} |n\rangle_b. \quad (21)$$

Xác suất để Alice nhận được các giá trị  $x_-, y_+$  là

$$P(\beta) = \|\Phi(\beta)\rangle_b\|^2. \quad (22)$$

Khi có kết quả đo số phức  $\beta$ , Alice sẽ gửi cho Bob bằng kênh thông tin cổ điển. Sau đó, Bob sẽ thực hiện phép biến đổi unita bằng cách dùng toán tử dịch chuyển  $\hat{D}(\beta)$  tác dụng lên trạng thái của mình để cho ra trạng thái được viễn tải

$$|\Phi_{out}\rangle = \frac{\mathcal{N}_{\phi,q} e^{-|\alpha-\beta|^2/2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n [1 + (-1)^n e^{i\phi}](\alpha - \beta)^{n+q}}{(n+q)! \sqrt{n!}} \hat{D}(\beta) |n\rangle. \tag{23}$$

Quá trình viễn tải đến đây là kết thúc. Chúng tôi sử dụng tiêu chuẩn để đánh giá mức độ hoàn thành của quá trình này thông qua giá trị độ trung thực trung bình. Để thực hiện điều này, ta tính được

$$\langle \alpha | \Phi_{out} \rangle = \frac{\mathcal{N}_{\phi,q} e^{-|\alpha-\beta|^2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n [1 + (-1)^n e^{i\phi}](\alpha^* - \beta^*)^n (\alpha - \beta)^{n+q}}{n!(n+q)!}. \tag{24}$$

Từ đó, ta có

$$|\langle \alpha | \Phi_{out} \rangle|^2 = \frac{\mathcal{N}_{q,k,p}^2(r) e^{-2|\alpha-\beta|^2}}{\pi} \times \frac{\mathcal{N}_{q,k,p}^2(r) e^{-2|\alpha-\beta|^2}}{\pi} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\xi^*)^m \xi^n [1 + (-1)^m e^{-i\phi}][1 + (-1)^n e^{i\phi}](\alpha - \beta)^{m+n+q} (\alpha^* - \beta^*)^{m+n+q}}{n!m!(n+q)!(m+q)!}. \tag{25}$$

Độ trung thực trung bình được định nghĩa trong [14]

$$F_{av} = \int |\langle \alpha | \Phi_{out} \rangle|^2 d^2\beta. \tag{26}$$

Thay vào biểu thức tích phân, ta nhận được

$$F_{av} = \frac{\mathcal{N}_{\phi,q}^2}{\pi} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\xi^*)^m \xi^n [1 + (-1)^m e^{-i\phi}][1 + (-1)^n e^{i\phi}]}{n!m!(n+q)!(m+q)!} \times \int e^{-2|\alpha-\beta|^2} (\alpha - \beta)^{m+n+q} (\alpha^* - \beta^*)^{m+n+q} d^2(\alpha - \beta), \tag{27}$$

lưu ý rằng đối với tích phân theo  $\beta$  thì  $\alpha$  là một hằng số. Sử dụng tích phân phức

$$\int e^{-s|\gamma|^2} (\gamma^*)^i (\gamma)^j d^2\gamma = \frac{\pi \sqrt{i!j!} \delta_{ij}}{s^{i+1}}. \tag{28}$$

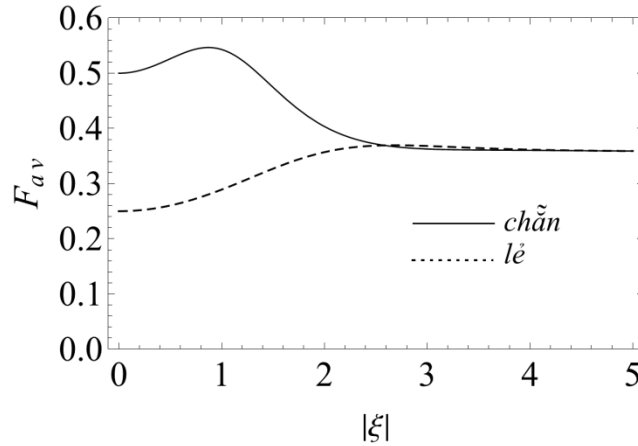
Từ đó, độ trung thực trung bình của quá trình này được xác định là

$$F_{av} = \frac{\mathcal{N}_{\phi,q}^2}{2} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\xi^*)^m \xi^n [1 + (-1)^m e^{-i\phi}][1 + (-1)^n e^{i\phi}](m+n+q)!}{n!m!(n+q)!(m+q)! 2^{m+n+q}}. \tag{29}$$

Giả sử  $\xi$  thực khi đó  $\xi = |\xi|$ , và  $q = 0$ , ta có

$$F_{av} = \frac{\mathcal{N}_{\phi,0}^2}{2} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{m+n} (m+n)! [1 + (-1)^m e^{-i\phi}] [1 + (-1)^n e^{i\phi}]}{(n!m!)^2 2^{m+n}}. \quad (30)$$

Biểu thức độ trung thực trung bình ở trên cho thấy rằng nó không phụ thuộc vào trạng thái được viễn tải. Tuy nhiên, kết quả khảo sát  $F_{av}$  thể hiện trên Hình 3 cho thấy quá trình viễn tải chỉ thành công với ECPCS với biên độ  $|\xi|$  bé và giá trị cực đại của độ trung thực trung bình là thấp. Khi  $|\xi|$  lớn và càng tăng, độ trung thực trung bình càng giảm. Điều này có thể lý giải như sau: mô hình của chúng tôi sử dụng để viễn tải phù hợp hơn cho các nguồn rối với trạng thái Gaussian; mặt khác, CPCS trong hai trường hợp được khảo sát chỉ chứa chẵn hoặc lẻ số photon mà trạng thái được viễn tải là một trạng thái kết hợp có đủ số hạt chẵn và lẻ, do vậy mức độ thành công sẽ không cao. Khi  $q > 0$  thì độ trung thực ở cả ECPCS và OCPCS luôn nhỏ hơn 0,5 và không thể dùng cho quá trình viễn tải.



Hình 3. Sự phụ thuộc của  $F_{av}$  vào  $|\xi|$  với  $q = 0$ . Đường liền nét ứng với ECPCS ( $\phi = 0$ ) và đường đứt nét ứng với OCPCS ( $\phi = \pi$ )

### 3.2. Viễn tải lượng tử theo cách đo tổng số hạt và hiệu pha

Để có một cách nhìn đầy đủ ảnh hưởng của các tham số lên mức độ thành công của quá trình viễn tải lượng tử, chúng tôi tiếp tục sử dụng mô hình đã được đề xuất trong [9]. Mặc dù mô hình này sử dụng phù hợp hơn cho viễn tải các trạng thái có số hạt xác định nhưng mô hình cũng hoạt động tốt với việc viễn tải trạng thái kết hợp có biên độ bé. Trạng thái hệ vào bây giờ vẫn được xác định như (16). Sử dụng khai triển trong không gian Fock, ta có

$$|\alpha\rangle_c = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle_c.$$

Phương trình (16) trở thành



$$|\Phi_{in}\rangle = \mathcal{N}_{\phi,q} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\xi^n [1 + (-1)^n e^{i\phi}] \alpha^m}{\sqrt{n!(n+q)!m!}} |n+q\rangle_a |n\rangle_b |m\rangle_c. \quad (31)$$

Tiếp theo, Alice sẽ thực hiện việc đo nối trên hai mode  $a$  và  $c$  bằng phép đo đồng thời tổng số hạt và hiệu pha. Với việc thực hiện phép đo tổng số hạt  $N_a + N_c$  và hiệu pha  $\varphi_a - \varphi_c$ , trạng thái của hệ chuyển thành

$$|\Phi_b\rangle = \frac{ca \langle \varphi_N^- | \Phi_{in} \rangle}{\sqrt{P}} = P^{-1/2} |\Psi_b\rangle, \quad (32)$$

với  $|\varphi_N^-\rangle$  là trạng thái riêng của toán tử tổng số hạt  $\hat{N} = \hat{N}_a + \hat{N}_c$  và hiệu pha  $\hat{\varphi}^- = \hat{\varphi}_a - \hat{\varphi}_c$ , ta viết lại trạng thái này theo [14]

$$|\varphi_N^-\rangle_{ac} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^N e^{ij\varphi^-} |j\rangle_a |N-j\rangle_c, \quad (33)$$

trong đó  $\varphi^-$  là trị riêng của toán tử  $\hat{\varphi}^-$ , với các giá trị có thể nhận  $\varphi_0^- \leq \varphi^- < \varphi_0^- + 2\pi$ , với  $\varphi_0^-$  là số thực tùy ý.  $P$  là xác suất thu được tổng số hạt  $N$  và hiệu pha  $\varphi^-$ . Phương trình (32) được khai triển thành

$$|\Phi_b\rangle = P^{-1/2} \frac{\mathcal{N}_{\phi,q} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{N-q} \frac{\xi^n [1 + (-1)^n e^{i\phi}] \alpha^{N-n-q} e^{-i(n+q)\varphi^-}}{\sqrt{n!(n+q)!(N-n-q)!}} |n\rangle_b, \quad (34)$$

với

$$P = \frac{\mathcal{N}_{\phi,q}^2 e^{-|\alpha|^2}}{\pi} \sum_{n=0}^{N-q} \frac{r^{2n} [1 + (-1)^n \cos\phi] |\alpha|^{2N-2n-2q}}{n!(n+q)!(N-n-q)!}. \quad (35)$$

Xác suất này là như nhau với mọi giá trị đo được của hiệu pha. Sau khi thực hiện xong phép đo, Alice gửi cho Bob tổng số hạt  $N$  và hiệu pha  $\varphi^-$ . Sau khi có được thông tin từ Alice, Bob thực hiện phép xoay pha bằng sử dụng toán tử biến đổi unita  $e^{i(\hat{N}_b+q)\varphi^-}$ , trong đó  $\hat{N}_b$  là toán tử số hạt ứng với mode  $b$  – mode trạng thái Bob  $\hat{N}_b |m\rangle_b = m |m\rangle_b$  với  $|m\rangle$  là trạng thái số hạt. Trạng thái của Bob bây giờ là

$$|\Phi_b\rangle = P^{-1/2} \frac{\mathcal{N}_{\phi,q} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{N-q} \frac{\xi^n [1 + (-1)^n e^{i\phi}] \alpha^{N-n-q}}{\sqrt{n!(n+q)!(N-n-q)!}} |n\rangle_b. \quad (36)$$

Sau đó Bob thực hiện dịch chuyển số hạt từ  $n$  thành  $N-n-q$  để thu được trạng thái ra

$$|\Phi_{out}\rangle = P^{-1/2} \frac{\mathcal{N}_{\phi,q} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{N-q} \frac{\xi^n [1 + (-1)^n e^{i\phi}] \alpha^{N-n-q}}{\sqrt{n!(n+q)!(N-n-q)!}} |N-n-q\rangle. \quad (37)$$

Độ trung thực của trạng thái ra là

$$F(\xi, |\alpha|, N) = |\langle \alpha | \Phi_{out} \rangle|^2 = P^{-1} \frac{\mathcal{N}_{\phi,q}^2 e^{-2|\alpha|^2} |\alpha|^{4N}}{2\pi} \times \left| \sum_{n=0}^{N-q} \frac{\xi^n [1 + (-1)^n e^{i\phi}] |\alpha|^{-2n-2q}}{\sqrt{n!(n+q)!(N-n-q)!}} \right|^2. \quad (38)$$

Độ trung thực trung bình được xác định bởi

$$F_{av}(\xi, |\alpha|) = \sum_{N=q}^{\infty} \int_{\phi_0^-}^{\phi_0^- + 2\pi} F(\xi, |\alpha|, N) P d\phi^-. \quad (39)$$

Thay (38) vào (39) ta tính được

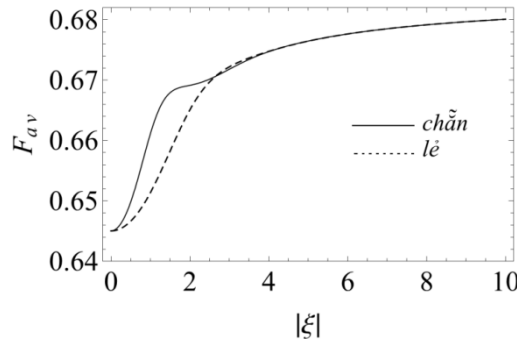
$$F_{av}(\xi, |\alpha|) = \mathcal{N}_{\phi,q}^2 e^{-2|\alpha|^2} \sum_{N=q+k}^{\infty} |\alpha|^{4N} \left| \sum_{n=0}^{N-q} \frac{\xi^n [1 + (-1)^n e^{i\phi}] |\alpha|^{-2n-2q}}{n!(n+q)!(N-n-q)!} \right|^2. \quad (40)$$

Để cho đơn giản, xem  $\xi$  là số thực và khi đó  $\xi = |\xi|$ . Ta viết lại phương trình trên như sau

$$F_{av} = \mathcal{N}_{\phi,q}^2 e^{-2|\alpha|^2} \sum_{N=q}^{\infty} |\alpha|^{4N} \left| \sum_{n=0}^{N-q} \frac{(|\xi| / |\alpha|^2)^n [1 + (-1)^n e^{i\phi}] |\alpha|^{-2q}}{\sqrt{n!(n+q)!(N-n-q)!}} \right|^2. \quad (41)$$

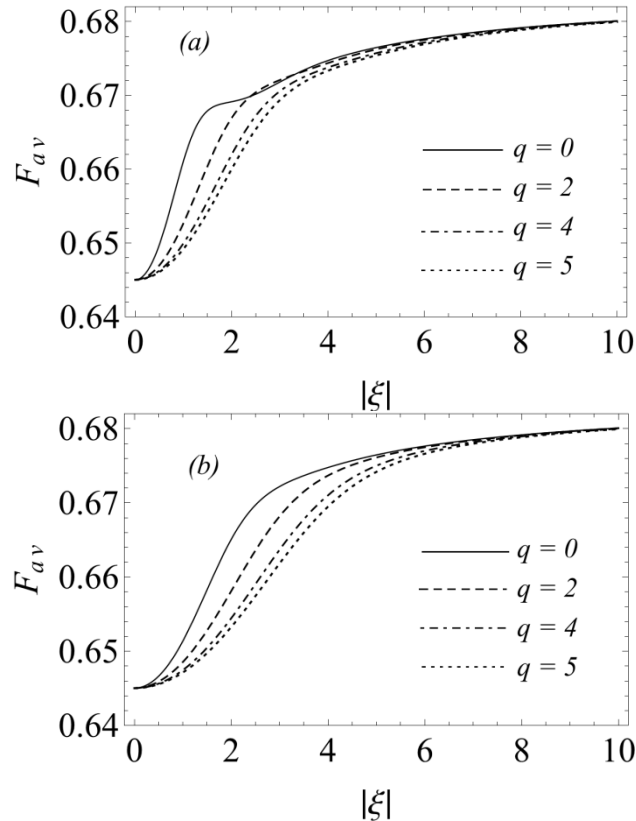
Trong trường hợp  $q = 0$ , biểu thức trên được viết lại như sau

$$F_{av} = \mathcal{N}_{\phi,0}^2 e^{-2|\alpha|^2} \sum_{N=0}^{\infty} |\alpha|^{4N} \left| \sum_{n=0}^N \frac{(|\xi| / |\alpha|^2)^n [1 + (-1)^n e^{i\phi}]}{n!(N-n)!} \right|^2. \quad (42)$$



**Hình 4.** Sự phụ thuộc của  $F_{av}$  vào  $|\xi|$  trong trường hợp  $q = 0$ .

Đường liền nét ứng với ECPCS ( $\phi = 0$ ) và đường đứt nét ứng với OCPCS ( $\phi = \pi$ ).



**Hình 5.** Sự phụ thuộc của  $F_{av}$  vào  $|\xi|$  với ENCPCS ( $\phi = 0$ ) ở hình (a) và ONCPCS ( $\phi = \pi$ ) ở hình (b). Các đường liền nét, đường đứt nét, đường chấm gạch và đường chấm chấm lần lượt ứng với  $q = 0, 2, 4, 5$ .

Dựa trên Hình 4 và các số liệu tính toán, chúng tôi thấy rằng độ trung thực  $F_{av}$  của ECPCS và OCPCS luôn lớn hơn 0,5 với các giá trị của  $|\xi|$  bất kỳ. Trong giới hạn giá trị  $|\xi|$  chưa đủ lớn thì độ trung thực  $F_{av}$  của ECPCS và OCPCS tăng theo  $|\xi|$  và đạt cực đại khi  $|\xi|$  tăng đến các giá trị tới hạn (khi  $|\xi|$  lớn hơn các giá trị tới hạn này thì độ trung thực của ECPCS và OCPCS sẽ giảm). Giá trị khảo sát bằng số ở Hình 5 cho chúng ta có cái nhìn rõ hơn: Cố định giá trị của  $|\xi| = 75$ ,  $|\alpha| = 0.3$ ,  $\phi = 0(\pi)$  và các giá trị số điện tích tương ứng  $q = 0, 2, 4, 5$  cho  $F_{av} = 84,8747\%$  (84,8748 %), 84,8722% (84,8703%), 84,8688% (84,8643%), 84,8597% (84,8667%). Cách hành xử của ECPCS và OCPCS trong trường hợp viễn tải theo cách này gần như không có sự khác biệt.

#### 4 Kết luận

Trong hai phần trên, bắt đầu từ việc khảo sát hàm entropy tuyến tính của CPCS, chúng tôi thấy rằng đây là một trạng thái đan rối. Tuy nhiên, mức độ đan rối của chúng đủ mạnh khi

biên độ  $|\xi|$  đạt đến giá trị đủ lớn. Độ chênh lệch về mức độ đan rối của ECPCS và OCPCS càng tăng khi giá trị  $|\xi|$  nằm lân cận  $|\xi|=0$ . Khi biên độ kết hợp lớn đến một giá trị tới hạn, giá trị hàm entropy tuyến tính theo các giá trị số điện tích khác nhau sẽ hội tụ về gần một giá trị cực đại. Các kết quả cũng cho thấy mức độ biểu hiện đan rối giữa ECPCS và OCPCS là tương tự nhau, khi biên độ  $|\xi|$  đủ lớn sẽ thu giá trị hàm entropy tuyến tính của cả hai trạng thái này gần như bằng nhau. Tiếp theo, chúng tôi đã sử dụng trạng thái này để viễn tải một trạng thái kết hợp theo hai cách đo khác nhau ở bên người gửi: đo đồng thời các biên độ trực giao và đo đồng thời tổng số hạt và hiệu pha. Kết quả khảo sát độ trung thực cho thấy rằng ECPCS phù hợp hơn cho việc viễn tải theo cách đo các biên độ trực giao. Tuy nhiên, theo cách đo tổng số hạt và hiệu pha thì ECPCS và OCPCS đều phù hợp cho quá trình viễn tải trạng thái kết hợp biên độ bé. Trong cách đo các biên độ trực giao trường hợp khi các giá trị  $q \geq 0$  cho độ trung thực trung bình tăng lên trong miền không lớn của  $|\xi|$  và miền thành công càng mở rộng về phía giá trị  $|\xi|$  tới hạn. Tóm lại, tùy theo việc chọn các trạng thái để viễn tải, các tham số, cũng như cách đo phù hợp, chúng ta có thể thay đổi được mức độ thành công của quá trình viễn tải lượng tử.

### Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ phát triển khoa học và công nghệ Quốc gia (NAFOSTED) trong đề tài mã số 103.01-2014.53

### Tài liệu tham khảo

1. Lee, C. T. (1990), Many-photon antibunching in generalized pair coherent states, *Phys. Rev. A*, 41(3), 1569.
2. Bhaumik, D., Bhaumik, K. and Dutta-Roy, B. (1976), Charged bosons and the coherent state, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 9(9), 1507.
3. Agarwal, G. S. (1988), Nonclassical statistics of fields in pair coherent states, *JOSA B*, 5(9), 1940.
4. Man'ko, V. I., Marmo, G., Sudarshan, E. C. G., Zaccaria, F. (1997), f-Oscillators and nonlinear coherent states, *Phys. Scr.*, 55(5), 528.
5. Eftekhari, F., Tavassoly, M. K. (2010), On a general formalism of nonlinear charge coherent states, their quantum statistics and nonclassical properties, *Int. J. Mod. Phys. A*, 25(17), 3481.
6. Gerry, C. C., Grobe, R. (1995), Nonclassical properties of correlated two-mode Schrödinger cat states, *Phys. Rev. A*, 51(2), 1698.
7. Milburn, G. J., Braunstein, S. L. (1999), Quantum teleportation with squeezed vacuum states, *Phys. Rev. A*, 60(2), 937.
8. Gabris, A., Agarwal, G. S. (2007), Quantum teleportation with pair-coherent states, *Int. J. Quantum Inf.*, 5(01n02), 17.
9. Cochrane, P. T., Milburn, G. J., Munro, W. J. (2000), Teleportation using coupled oscillator states, *Phys. Rev. A*, 62(6), 062307.

10. Li, S. B., Wu, R. K., Wang, Q. M., Xu, J. B. (2004), Entanglement of pair cat states and teleportation, *Phys. Lett. A*, 325(3), 206.
11. Duc, T. M., Dinh, D. H., Dat, T. Q. (2016), Even and Odd Charge Coherent States: Higher-Order Nonclassical Properties and Generation Scheme, *Int. J. Theor. Phys.*, 55(6), 3027.
12. Agarwal, G. S., Biswas, A. (2005), Quantitative measures of entanglement in pair-coherent states, *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, 7(11), 350.
13. Bennett, C. H., Brassard, G., Crépeau, C., Jozsa, R., Peres, A., Wootters, W. K. (1993), Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels, *Phys. Rev. Lett.*, 70(13), 1895.
14. Hofmann, H. F., Ide, T., Kobayashi, T., Furusawa, A. (2000), Fidelity and information in the quantum teleportation of continuous variables, *Phys. Rev. A*, 62(6), 062304.
15. Luis, A., Sánchez-Soto, L. L. (1996), Probability distributions for the phase difference, *Phys. Rev. A*, 53(1), 495.

## QUANTUM TELEPORTATION WITH CHARGE-PAIR CAT STATES

Dang Huu Dinh\*, Truong Minh Duc

HU – University of Education, Vietnam

**Abstract:** In this paper, we investigated the entanglement properties of the charge-pair cat states based on the linear entropy function. We used these states for the teleportation of a coherent state in two different measurements at the sender by using joint measurements of the quadrature amplitude and joint measurements of the photon number sum and phase difference. The investigated results of the fidelity show that the even charge-pair cat states are more suitable for teleportation in the way of the quadrature amplitude measurements. However, according to the results of the joint measurement of the photon-number sum and phase difference, both the even and odd charge-pair cat states are suitable for the teleportation process in the small amplitude of the coherent state.

**Keywords:** charge-pair cat states, fidelity, quantum teleportation