Tạp chí Khoa học Đại học Huế: Khoa học Tự nhiên; ISSN 1859–1388

Tập 126, Số 1A, 2017, Tr. 125–131; http://dx.doi.org/10.26459/jns.v126i1A.4241

VỀ MÔ ĐUN 2–TỰA NỘI XẠ LINH

Lương Thị Minh Thủy*

Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế, 32 Lê Lợi, thành phố Huế

Tóm tắt: Một mô đun con *N* của mô đun *M* được gọi là thỏa mãn điều kiện *(S)* nếu *N* hoặc là một hạng tử trực tiếp của M hoặc $N^2=0$. Một mô đun M_R được gọi là *2–tựa nội xạ linh* nếu mỗi R–đồng cấu $f: mR \to M$, trong đó mR là mô đun con của M thỏa mãn điều kiện (S), tồn tại một đồng cấu $\bar{f}: M \to M$ sao cho $\bar{f}(x) = f(x)$ với mọi $x \in mR$. Trong bài báo này chúng tôi đưa ra một số đặc trưng cơ bản của lớp mô đun 2–tựa nội xạ linh.

Từ khóa: Môđun 2-tựa nội xạ linh

1 Giới thiệu

Trong bài báo này, vành R đã cho luôn được giả thiết là vành kết hợp có đơn vị $1 \neq 0$ và mọi R–môđun được xét là môđun unita. Với vành R đã cho, viết M_R $({}_R M)$ để chỉ M là một R–môđun phải (t. ư, trái). Trong một ngữ cảnh cụ thể của bài báo, khi không sợ nhầm lẫn về phía của mô đun, để đơn giản chúng ta viết mô đun M thay vì M_R. Chúng ta dùng các ký hiệu $A \leq M$ $(A < M)$ để chỉ A là mô đun con (t. ư., thực sự) của M. Nếu A là mô đun con cực đại (hạng tử trực tiếp) của mô đun M, chúng ta viết $A \leq^{max} M$ (t. ư., $A \leq^{\oplus} M$). Căn Jacobson, đế của mô đun M được ký hiệu tương ứng là $Rad(M)$ và $Soc(M)$, đặc biệt, $J(R)$ được dùng để ký hiệu cho căn Jacobson của vành R. Chúng ta viết $M_n(R)$ để chỉ vành các ma trận vuông cấp n với hệ tử trên vành R. Nếu I là một tập hợp với $card(I) = \alpha$ và M là một mô đun, chúng ta sẽ ký hiệu tổng trực tiếp α bản sao của M bởi $M^{(I)}$ hoặc $M^{(\alpha)}$, tích trực tiếp α bản sao của M bởi M^I hoặc M^α. Chúng ta ký hiệu Mod–R (R–Mod) là phạm trù các R–môđun phải (t. ư., trái). Cho M và N là các R–môđun phải. Đồng cấu từ M đến N được hiểu là đồng cấu từ R–môđun phải M đến R–môđun phải N.

Cho M là một R–môđun phải và tập $\varnothing \neq X \subset M$. *Linh hóa tử phải của* X *trong* R được ký hiệu là $r_R(X)$ và được xác định như sau

$$r_R(X) = \{r \in R \mid xr = 0\ (\forall x \in X)\}.$$

Khi không sợ nhầm lẫn chúng ta có thể viết gọn là $r(X)$ thay vì $r_R(X)$. Khi $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ thì chúng ta viết $r(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ thay vì $r(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\})$. Ta có $r_R(X)$ là một iđêan phải của vành R. Hơn nữa, nếu X là mô đun con của M thì $r(X)$ là một iđêan (phải và trái) của R. Linh hóa tử trái của X trong R được ký hiệu là $l_R(X)$ và được định nghĩa tương tự.

Một vài năm trở lại đây, vấn đề các mô đun nội xạ và các mở rộng của chúng đã thu hút nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Xuất phát từ khái niệm mô đun P–nội xạ hay còn goi là 1–nội xạ đã được Nicholson và Yousif [5] nghiên cứu, các tác giả Chen, Ding, Le và Zhou đã nghiên cứu khái niệm (m, n)–nội xạ. Một số đặc trưng và cấu trúc của vành thông qua lớp mô đun này đã được nghiên cứu [3]. Năm

* *Liên hệ: minhthuydhsp@gmail.com*

Nhận bài: 11–05–2017; Hoàn thành phản biện: 23–05–2017; Ngày nhận đăng: 05–06–2017

2011, nhóm tác giả Lê Văn Thuyết, Trương Công Quỳnh và Lương Thị Minh Thủy đã nghiên cứu khái niệm tích của hai mô đun con [7]. Từ đó, các tác giả đã xem xét định nghĩa lớp mô đun *tựa nội xạ linh* và các tính chất của chúng. Như chúng ta được biết một iđêan phải đơn của một vành hoặc là một hạng tử trực tiếp hoặc nó lũy linh với bậc lũy linh là 2. Trong [7], các tác giả đã chứng minh được *"Nếu N là một mô đun con đơn của M thì N hoặc là một hạng tử trực tiếp của M hoặc $N^2 = 0$ "* và kết quả này mở rộng cho vành. Từ kết quả này chúng tôi xem xét tính chất của các mô đun thông qua các mô đun con thỏa mãn điều kiện trên. *"Một mô đun con N của mô đun M được gọi là thỏa mãn điều kiện (S) nếu N hoặc là một hạng tử trực tiếp của M hoặc $N^2 = 0$ "*. Một mô đun M được gọi là *2–tựa nội xạ linh* nếu mọi đồng cấu từ một mô đun con của M thỏa mãn điều kiện (S) đến M đều mở rộng được đến tự đồng cấu của M. Trong phần nghiên cứu này, chúng tôi xem xét một số tính chất tương tự của mô đun tựa nội xạ linh.

2 Mô đun 2–tựa nội xạ linh

Cho M là một R–môđun phải, $S := End_R(M)$ và H, K là những mô đun con của M.

Định nghĩa 2.1. ([Definition 2.7.] LTQ) *Cho H, K là những mô đun con của M. Khi đó, tích của hai mô đun con H và K kí hiệu là HK và được xác định như sau*

$$HK := \sum\{f(K) \mid f \in Hom(M,H)\}.$$

Cho N là một mô đun con của M và $n \in \mathbb{N}$. Định nghĩa một họ các mô đun con của N như sau

$$N^1 = N, N^2 = NN, N^3 = N^2N, \dots, N^n = N^{n-1}N.$$

Khi đó

$$N^n \le N^{n-1} \le \cdots \le N^2 \le N^1 = N.$$

Trong lý thuyết vành, chúng ta có kết quả cổ điển là "Nếu I là một iđêan cực tiểu của R thì I hoặc là một hạng tử trực tiếp của R hoặc $I^2 = 0$ ". Định lý sau mở rộng cho kết quả trên và đã được chứng minh trong [7].

Định lý 2.2. ([Theorem 2.11] LTQ) *Cho N là một mô đun con đơn của M. Khi đó N hoặc là một hạng tử trực tiếp của M hoặc $N^2 = 0$.*

Định nghĩa 2.3. *Mô đun con N của mô đun M được gọi là thỏa mãn điều kiện (S) nếu N hoặc là một hạng tử trực tiếp của M hoặc $N^2 = 0$.*

Hệ quả 2.4. *Cho M là một R–môđun phải. Khi đó, mọi mô đun con đơn của M đều thỏa mãn điều kiện (S).*

Trong trường hợp tổng quát điều ngược lại nói chung không đúng.

Ví dụ 2.5. *Cho* $R=\begin{pmatrix}\mathbb{Z} & \mathbb{Z}\\ 0 & \mathbb{Z}\end{pmatrix}$. *Lấy* $x=\begin{pmatrix}0 & z_0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ *ta có* $xR=\{\begin{pmatrix}0 & z_0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & z\end{pmatrix} \mid z_0,x,y,z\in\mathbb{Z}\}=\{\begin{pmatrix}0 & z_0z\\ 0 & 0\end{pmatrix} \mid z_0,z\in\mathbb{Z}\}=\begin{pmatrix}0 & z_0\mathbb{Z}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. *Lúc đó* $(xR)^2=0$, *vì vậy* xR *thỏa mãn điều kiện* (S). *Dễ dàng chúng ta kiểm tra được* xR *không phải mô đun đơn.*

Trong [7], chúng ta có một mô đun con N của mô đun M được gọi là *lũy linh* nếu tồn tại $n\in\mathbb{N}$ sao cho $N^n=0$ và kí hiệu Nil(M) = {m ∈ M | mR lũy linh}. Một mô đun M_R được gọi là *tựa nội xạ linh* nếu đối với mỗi R–đồng cấu $f: mR\to M$, $m\in Nil(M)$, tồn tại một đồng cấu $\overline{f}: M\to M$ sao cho $\overline{f}(x)=f(x)$ với mọi $x\in mR$. Sử dụng điều kiện (S), chúng tôi đưa ra khái niệm sau:

Định nghĩa 2.6. *Một mô đun M_R được gọi là 2–tựa nội xạ linh nếu mỗi R–đồng cấu $f: mR\to M$, trong đó mR là mô đun con của M thỏa mãn điều kiện (S), tồn tại một đồng cấu $\overline{f}: M\to M$ sao cho $\overline{f}(x)=f(x)$ với mọi $x\in mR$.*

Một vành R được gọi là 2–tựa nội xạ linh phải (tương ứng, trái) nếu R_R (tương ứng, ${}_RR$) là một mô đun 2–tựa nội xạ linh.

Nhận xét 2.7. *Mọi mô đun tựa nội xạ linh là mô đun 2–tựa nội xạ linh.*

Cho M_R là một R–môđun phải, $m\in M$ và $x\in R$, chúng ta ký hiệu

$$l_M(x)=\{m\in M \mid mx=0\} \text{ và } r_R(m)=\{r\in R \mid mr=0\}$$

Định lí sau cho chúng ta một số đặc trưng của lớp mô đun 2–tựa nội xạ linh

Định lý 2.8. *Cho M là một R–môđun phải và $S=End(M_R)$. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

1. M_R là mô đun 2–tựa nội xạ linh.

2. Nếu mR là mô đun con của mô đun M thỏa mãn điều kiện $(mR)^2=0$, $m\in M$ thì $l_Mr_R(m)=Sm$.

3. Nếu mR là mô đun con của mô đun M thỏa mãn điều kiện $(mR)^2=0$ và $r_R(m)\subseteq r_R(n)$, $m,n\in M$ và $n\neq 0$ thì $Sm\leq Sn$.

4. Nếu mR là mô đun con của mô đun M thỏa mãn điều kiện $(mR)^2=0$ và $\gamma: mR\to M$ là một đồng cấu, $m\in M$, thì $\gamma(m)\in Sm$.

5. Nếu mR là mô đun con của mô đun M thỏa mãn điều kiện $(mR)^2=0$, $m\in M$ thì $l_M[aR\cap r_R(m)]=l_M(a)+Sm$ với mọi $a\in R$.

Chứng minh.

(1) $\Rightarrow$ (2) Chúng ta có $Smr_R(m)=0$ nên $Sm \subseteq l_M r_R(m)$. Ngược lại, nếu $n \in l_M r_R(m)$ thì khi đó với mọi R–đồng cấu $f: mR \to M$ được định nghĩa $f(mr)=nr$, chọn $\overline{f} \in S$ là một mở rộng của f chúng ta có $n = f(m) = \overline{f}(m) \in Sm$. Ta chứng minh được mệnh đề (2).

(2) $\Rightarrow$ (3) Giả sử mR là một mô đun con của mô đun M thỏa mãn điều kiện $(mR)^2 = 0$ và $r_R(m) \subseteq r_R(n)$, trong đó $m,n \in M$. Vì $(mR)^2 = 0$ nên kéo theo $Sn \le l_M r_R(n) \le l_M r_R(m) = Sm$. Do đó $Sm \le Sn$ theo (2).

(3) $\Rightarrow$ (4) Nếu mR là mô đun con của mô đun M thỏa mãn điều kiện (S) và $f: mR \to M$ là một đồng cấu, thì $r_R(m) \subseteq r_R(f(m))$ và chúng ta có $Sf(m) \le Sm$ theo (3) vì vậy $f(m) \in Sm$.

(4) $\Rightarrow$ (1) Lấy $\gamma: mR \to M$ với mR là mô đun con của mô đun M thỏa mãn điều kiện (S). Suy ra $\gamma(m) \in Sm$, vì vậy tồn tại $\overline{\gamma} \in S$ để $\gamma(m) = \overline{\gamma}(m)$. Suy ra $\overline{\gamma}$ là mở rộng của γ. Hay M_R là mô đun 2–tựa nội xạ linh.

(3) $\Rightarrow$ (5) Lấy $x \in l_M[aR \cap r_R(m)]$ lúc đó nếu $(ma)r = 0$ thì $ar \in aR \cap r_R(m)$ nên $(xa)r = 0$ vậy $r_R(ma) \subseteq r_R(xa)$. Theo (3) $Sxa \le Sma$ hay $xa = sma$ với $s \in S$. Điều này có nghĩa là $(x - sm)a = 0$ hay $x - sm \in l_M(a)$. Suy ra $x \in l_M(a) + Sm$. Do đó, $l_M[aR \cap r_R(m)] \subseteq l_M(a) + Sm$. Ngược lại, luôn có $l_M(a) + Sm \subseteq l_M[aR \cap r_R(m)]$.

(5) $\Rightarrow$ (1) Với $f: mR \to M$ là một R–đồng cấu. Ta có $r_R(m) \le r_R(f(m))$, suy ra $l_M r_R(f(m)) \le l_M r_R(m)$. Theo giả thiết ta có $f(m) \in l_M r_R(f(m)) \le Sm$, suy ra tồn tại một R–đồng cấu $\overline{f}: M \to M$ sao cho $\overline{f}(m) = f(m)$.

Một vành R được gọi là *nội xạ trực tiếp đơn phải* nếu mọi iđêan phải đơn của R mà đẳng cấu với một hạng tử trực tiếp của R_R, là một hạng tử trực tiếp của R_R [2].

Mệnh đề 2.9. *Nếu R là một vành 2–tựa nội xạ linh phải thì R là vành nội xạ trực tiếp đơn phải.*

Chứng minh.

Cho K là một iđêan phải đơn của R và $f: K \to eR$ là một đẳng cấu, trong đó e là một phần tử lũy đẳng nào đó của R. Vì R là một vành 2–tựa nội xạ linh phải, nên suy ra tồn tại $c \in R$ sao cho $cK = eR \not\le J(R)$. Điều này chứng tỏ $K^2 \ne 0$. Theo tính chất đơn của K, chúng ta phải có K là một hạng tử trực tiếp của R_R. Vậy R là vành nội xạ trực tiếp đơn phải.

Ví dụ sau chứng tỏ chiều ngược lại không đúng trong trường hợp tổng quát.

Ví dụ 2.10. *Cho R không phải là một vành 2–tựa nội xạ linh phải. Khi đó, vành đa thức $R[x]$ cũng không phải là một vành 2–tựa nội xạ linh phải . Tuy nhiên, $R[x]$ là vành nội xạ đơn phải.*

Kết quả tiếp theo nhằm mục đích để nghiên cứu tính bất biến Morita của vành 2–tựa nội xạ linh.

Mệnh đề 2.11. *Cho R là một vành 2–tựa nội xạ linh phải. Nếu $ReR = R$, trong đó $e^2 = e \in R$, thì eRe cũng là một vành 2–tựa nội xạ linh phải.*

Chứng minh.

Đặt $S = eRe$. Giả sử $a \in S$ sao cho $(aS)^2 = 0$. Vì R là một vành 2–tựa nội xạ linh phải nên $Ra = l_R r_R(a)$ bởi Định lý 2.8. Gọi $x \in l_S r_S(a)$. Khi đó, $r_S(a) \leq r_S(x) \leq r_R(x)$. Bây giờ chúng ta lấy $y \in r_R(a)$. Khi đó, $ay = 0$. Chúng ta viết $1 = \sum_{i=1}^{n} u_i e v_i ; u_i, v_i \in R$. Rõ ràng chúng ta có $xyu_i e = xeyu_i e = 0$ với mọi i bởi vì $r_S(a) \leq r_S(x)$. Khi đó, $xy = \sum_{i=1}^{n} xyu_i e v_i = 0$, và vì vậy $y \in r_R(x)$. Điều này chứng tỏ $r_R(a) \leq r_R(x)$ và do đó $x \in l_R r_R(x) \leq l_R r_R(a) = Ra$. Suy ra $x = ex \in eRa = eRea = Sa$. Từ đây suy ra $l_S r_S(a) \leq Sa$. Vậy $Sa = l_S r_S(a)$. Như vậy, chúng ta đã chỉ ra được $eRe = S$ là một vành 2–tựa nội xạ linh phải theo Định lý 2.8.

Tiếp theo chúng tôi nêu một số tính chất khác của các mô đun 2–tựa nội xạ linh.

Định lý 2.12. *Cho M_R là mô đun 2–tựa nội xạ linh với $S = end(M_R)$ và $m, n \in M$.*

1. Nếu mR, nR là những mô đun con của mô đun M thỏa mãn điều kiện (S) và nR là ảnh của mR, thì Sn nhúng được trong Sm như một S–môđun trái.

2. Nếu mR, nR là những mô đun con của mô đun M thỏa mãn điều kiện (S) và mR nhúng được trong nR thì Sm là ảnh của Sn.

3. Nếu mR, nR là những mô đun con của mô đun M thỏa mãn điều kiện (S) và $nR \cong mR$ thì $Sm \cong Sn$.

Chứng minh.

Nếu $\alpha : mR \to nR$ là một toàn cấu. Theo giả thiết M là mô đun 2–tựa nội xạ linh nên tồn tại $\bar{\alpha} : M \to M$ sao cho $\bar{\alpha}|_{mR} = \iota o \alpha$ với $\iota : mR \to M$ là một đơn cấu chính tắc. Chọn $\phi : Sn \to Sm$ với $\phi(tn) = t\bar{\alpha}(m)$ ta có ϕ là một S–đồng cấu.

(1) Nếu $\phi(tn) = 0$ suy ra $t\bar{\alpha}(m) = 0$. Lúc đó $t\iota\alpha(m) = 0$ hay $t\iota\alpha = 0$ suy ra $t\iota = 0$ (do α là toàn cấu). Vậy $tn = t\iota(n) = 0$ hay ϕ là S–đơn cấu.

(2) Nếu α là đơn ánh, thì $r_R(\alpha m) \subseteq r_R(m)$, do đó, theo Định lí 2.8 ta có $m \in S(\alpha m) \subseteq Im\phi$. Vậy (2) được chứng minh.

(3) Nếu α là một đẳng cấu thì ϕ cũng là một đẳng cấu. Vậy (3) được chứng minh.

Cho M là một R–môđun phải. Chúng ta gọi một R–mô đun phải N là M–2–tựa nội xạ linh, nếu với mỗi mô đun con P của mô đun M thỏa mãn điều kiện $P^2 = 0$, mọi R–đồng cấu $f : P \to N$ mở rộng đến M. Rõ ràng, M là 2–tựa nội xạ linh nếu và chỉ nếu M là M–2–tựa nội xạ linh.

Mệnh đề 2.13. *Cho $N_1, N_2, \cdots, N_n$ là những mô đun con của mô đun M. Khi đó, $\oplus_{i=1}^{n} N_i$ là M–2–tựa nội xạ linh nếu và chỉ nếu N_i là M–2–tựa nội xạ linh với mọi $i = 1, \cdots, n$.*

Chứng minh.

Giả sử mỗi N_i là M–2–tựa nội xạ linh. Lấy $\gamma : K \to \oplus_{i=1}^{n} N_i$ là một R–tuyến tính, trong đó K là mô đun con của mô đun M thỏa mãn điều kiện (S). Ta có $\gamma(K) \subseteq \oplus_{t=1}^{n} N_t$. Nếu $\pi_t : \oplus_{i=1}^{n} N_i \to N_t$ là phép chiếu với mỗi *t*, thì $\pi_t\gamma = m_t \in N_t$ (theo giả thiết). Nếu lấy $k \in K$ và $\gamma(k) = \sum_{t=1}^{n} m'_t$ thì $m'_t = \pi_t\gamma(k) = m_t k$. Vì vậy, suy ra $\gamma = m\cdot$ (với $m = \sum_{t=1}^{n} m_t$). Hay $\oplus_{i=1}^{n} N_i$ là M–2–tựa nội xạ linh. Điều ngược lại là rõ ràng.

Chúng tôi gọi một vành R là *2–chính quy* nếu $a \in aRa$ với mọi phần tử $a \in R$ và $(aR)^2 = 0$.

Định lý 2.14. *Các điều kiện sau là tương đương với một vành R cho trước.*

1. R là vành 2–chính quy.
2. Mỗi R–môđun phải là R–2–tựa nội xạ linh.
3. Mỗi R–môđun phải theo chu kỳ là R–2–tựa nội xạ linh.
4. R là vành 2–nội xạ linh phải và aR xạ ảnh với mọi $a \in R$ và $(aR)^2 = 0$.

Chứng minh.

$(1) \Rightarrow (2)$. Cho M là một R–môđun phải và $f : aR \to M$ là đồng cấu với $(aR)^2 = 0$. Theo (1), $a = aba, b \in R$. Chúng ta viết $e = ab$. Khi đó, $e^2 = e$ and $a = ea$. Gọi $m = f(e)$ và đồng cấu $g : R \to M$ xác định bởi $g(x) = mx$. Khi đó, g là một mở rộng của f.

$(2) \Rightarrow (3)$ là rõ ràng.

$(3) \Rightarrow (4)$. Rõ ràng R là vành 2–nội xạ linh phải. Tiếp theo chúng ta lấy $a \in R$ sao cho $(aR)^2 = 0$. Bởi giả thiết chúng ta có aR là R–2–tựa nội xạ linh. Khi đó, tồn tại $c \in aR$ sao cho $id_{aR}(x) = cx$ với mọi $x \in aR$. Suy ra $a = id_{aR}(a) = ca \in aRa$. Chúng ta viết $c = ab$ với $b \in R$. Khi đó, $a = ca = aba; c^2 = abab = ab = c$ và $aR = cR$ là một mô đun xạ ảnh.

$(4) \Rightarrow (1)$ Cho $a \in R$ sao cho $(aR)^2 = 0$. Khi đó, $Ra = l_R r_R(a)$ theo Định lý 2.8. Theo (4), thì tồn tại một phần tử lũy đẳng e của R sao cho $r_R(a) = (1-e)R$. Suy ra $Ra = Re$. Chúng ta có $e = ca$ với $c \in R$ nào đó. Vì vậy, $a = ae = aca$. Điều này chứng tỏ R là vành 2–chính quy.

Lời cám ơn: Xin cám ơn sự tài trợ của quỹ phát triển Khoa học và Công nghệ (NAFOSTED) với đề tài mã số 101.04–2014.22 cho quá trình nghiên cứu và hoàn thành đề tài.

Tài liệu tham khảo

1. F. W. Anderson and K. R. Fuller (1974), Rings and Categories of Modules, Springer–Verlag, New York.
2. V. Camillo, Y. Ibrahim, M. Yousif, Y. Zhou (2014), Simple-direct-injective modules, J. Algebra 420, 39–53.
3. J. Chen, N. Ding, Y. Li and Y. Zhou (2001), On (m,n)-injectivity of modules, Commu. Algebra, 29(12), 5589–5603.
4. W.K. Nicholson, J.K. Park, M.F. Yousif (1999), Principally quasi-injective modules, Comm. Algebra, 27(4), 1683–1693.
5. W.K. Nicholson and M.F. Yousif (2003), *Quasi-Frobenius Rings*, Cambridge Univ. Press.
6. W.K. Nicholson and M.F. Yousif (1997), Mininjective ring, J. Algebra, 187, 548–578.

7. L. V. Thuyet, L. T. M. Thuy and T. C. Quynh (2015), On quasi nil-injective modules, Annales Unis Sci. Budapest., Sect. Comp. 44, 93–107.
8. J. Wei and J. Chen (2007), Nil-injective rings, Int. Electron. J. Algebra, 2, 1–21.
9. R. Wisbauer (1991), *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach, Reading.

ON 2–QUASI-NIL-INJECTIVE MODULES

Luong Thi Minh Thuy*

University of Education, Hue University, 32 Le Loi, Hue City, Vietnam

Abstract: A submodule N of a module M is considered to satisfy the condition (S) if N is either a direct summand of M or $N^2 = 0$. A module M_R is called *2–quasi-nil-injective* if each R–homomorphism $f : mR \to M$, where mR is a submodule of M and satisfies the condition (S), and there exists a homomorphism $\overline{f} : M \to M$ such that $\overline{f}(x) = f(x)$ for every $x \in mR$. In this paper, we present some characterizations of the class of 2–quasi-nil-injective modules.

Keywords: 2–quasi-nil-injective modules