Tạp chí Khoa học Đại học Huế: Khoa học Tự nhiên
Tập 129, Số 1C, 117–123, 2020

pISSN 1859-1388
eISSN 2615-9678

CÁC ĐẶC TRƯNG CỦA MÔĐUN XẠ ẢNH BÉ

Nguyễn Thị Thu Hà[1,2*]

[1] Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế, 34 Lê Lợi, Huế, Việt nam
[2] Trường Đại học Công nghiệp Thành phố Hồ Chí Minh, 12 Nguyễn Văn Bảo, Q. Gò Vấp, Tp. Hồ Chí Minh, Việt nam

* Tác giả liên hệ Nguyễn Thị Thu Hà <nguyenthithuha8282@gmail.com>
(*Ngày nhận bài: 06-05-2020; Ngày chấp nhận đăng: 04-06-2020*)

Tóm tắt. Mục tiêu chính của bài báo này là giới thiệu một mở rộng của môđun xạ ảnh, đó là môđun xạ ảnh bé. Chúng tôi đưa ra các tính chất của lớp môđun này và từ đó tổng quát lên đặc trưng trên các vành liên quan. Phần sau chúng tôi đưa ra một số kết quả chỉ ra quan hệ giữa các môđun xạ ảnh bé và các môđun đối bất biến tự đẳng cấu. Các kết quả trong bài báo đã được giới thiệu trong [1]. Ở đây, chúng tôi bổ sung thêm các ví dụ và chứng minh tường minh một số kết quả chưa được chứng minh trong bài báo nêu trên.

Từ khóa: môđun xạ ảnh bé, môđun xạ ảnh, môđun đối bất biến tự đẳng cấu

Some characterizations of small projective modules

Nguyen Thi Thu Ha[1,2*]

[1] University of Education, Hue University, 34 Le Loi St., Hue, Vietnam
[2] Industrial University of Ho Chi Minh City, 12 Nguyen Van Bao, Go Vap Dist., Ho Chi Minh City, Vietnam

* Correspondence to Nguyen Thi Thu Ha <nguyenthithuha8282@gmail.com>
(*Received: 06 May 2020; Accepted: 04 June 2020*)

Abstract. The aim of this paper is to introduce a generalization of projective modules, that is small projective modules. We give some new results on this kind of module and obtain some characterizations of some related rings. Then, we show the relationship between small projective modules and automorphism-coinvariant modules. The results in the article was introduced in [1]. Here, we add examples and clearly demonstrate the prove of some unproven results in the above article.

Keywords: small projective module, projective module, automorphism-coinvariant module

1 Giới thiệu

Trong toàn bộ bài báo này, các vành đều là vành kết hợp, có đơn vị và các môđun là môđun phải unita nếu không có chú thích nào khác. Chúng tôi sử dụng ký hiệu $N \le M$, $N \ll M$ để chỉ rằng N là một môđun con của M, N là một môđun con bé của M tương ứng (môđun con N của môđun M được gọi là *bé* trong M nếu với mỗi môđun con $B \ne M$ của M ta đều có $N + B \ne M$). Chúng tôi ký hiệu $J(R), J(M), Soc(R_R), Soc(M), Z(R_R)$ cho căn Jacobson của vành R, căn của môđun M, đế phải của R, đế của M và iđêan phải suy biến của R tương ứng. Với những ký hiệu khác không được đề cập ở đây, độc giả có thể tìm hiểu thêm trong các tài liệu [2, 3-6, 7].

Xét M và N là các R-môđun phải, chúng tôi ký hiệu

$$\nabla[M,N] = \{ f \in Hom(M,N) : \mathrm{Im}(f) \ll N\}$$

và

$$\nabla(M) = \{ f \in End(M) : \mathrm{Im}(f) \ll M\}.$$

Rõ ràng, $\nabla(M)$ là một iđêan của End(M).

Định nghĩa 1.1. ([8]) Cho hai R-môđun phải M và N.

(1) M được gọi là N*-xạ ảnh bé* nếu mỗi đồng cấu $f : M \to K$ với $\mathrm{Im}(f) \ll K$ và mỗi toàn cấu $p : N \to K$ thì luôn tồn tại một đồng cấu $g : M \to N$ sao cho $p \circ g = f$, nghĩa là mọi biểu đồ sau là giao hoán

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dotted] \arrow[d, "f"] & \\ N \arrow[r, "p"] & K \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(2) M được gọi là *tựa xạ ảnh bé* nếu M là M-xạ ảnh bé.

(3) M được gọi là *xạ ảnh bé* nếu M là N-xạ ảnh bé với mọi môđun N.

Định nghĩa 1.2. ([9]) Môđun M được gọi là môđun đối bất biến tự đẳng cấu nếu với mọi môđun con K_1 và K_2 của M, mỗi toàn cấu $\varphi : M / K_1 \to M / K_2$ với hạt nhân bé đều mở rộng được đến một tự đẳng cấu của M

Rõ ràng, mọi môđun đối bất biến tự đẳng cấu đều là môđun tựa xạ ảnh bé. Chúng tôi sẽ trả lời câu hỏi ngược lại "Khi nào thì một môđun tựa xạ ảnh bé lại là môđun đối bất biến tự đẳng cấu?" trong Định lý 2.4: cho một R-môđun phải M với một phủ xạ ảnh $p : X \to M$, khi đó M là môđun đối bất biến tự đẳng cấu khi và chỉ khi M là môđun tựa xạ ảnh bé và $End(M)/\nabla(M)$ ổn định với phép nhân bên trái bởi các phần tử khả nghịch của $End(X)/J(End(X))$.

Định nghĩa 1.3. Cho M là R-môđun phải. Toàn cấu $\rho : P \to M$ được gọi là phủ xạ ảnh của M nếu ρ là toàn cấu đối cốt yếu (nghĩa là $\mathrm{Ker}(\rho) \ll P$) và P là môđun xạ ảnh.

Khi $\rho : P \to M$ là phủ xạ ảnh thì ta thường gọi môđun P là phủ xạ ảnh của môđun M và được ký hiệu $P = P(M)$.

Ví dụ 1.4. Gọi R là vành cho bởi $\begin{bmatrix} \mathbb{F}_2 & \mathbb{F}_2 & \mathbb{F}_2 \\ 0 & \mathbb{F}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{F}_2 \end{bmatrix}$ trong đó $\mathbb{F}_2$ là trường có hai phần tử. Lấy $M = e_{11}R$. Do R là đại số hữu hạn chiều trên $\mathbb{F}_2$, nên các hàm tử

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(-,\mathbb{F}_2) : \mathrm{Mod} - R \to R - \mathrm{Mod}$$

và

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(-,\mathbb{F}_2) : R - \mathrm{Mod} \to \mathrm{Mod} - R$$

thiết lập tương đương phản biến giữa các phạm trù con của môđun hữu hạn sinh trái và phải trên R. Ngoài ra, vì M là R-môđun phải hữu hạn sinh, nên bao nội xạ $E(M)$ cũng hữu hạn sinh.

Vì vậy, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(E(M),\mathbb{F}_2)$ là phủ xạ ảnh của $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(M,\mathbb{F}_2)$. Từ đó, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(M,\mathbb{F}_2)$ là R-môđun trái đối bất biến tự đẳng cấu, nên nó là môđun xạ ảnh bé. Ngoài ra, chú ý rằng $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(M,\mathbb{F}_2)$ không bất biến dưới các tự đồng cấu của phủ xạ ảnh $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(E(M),\mathbb{F}_2)$, bởi vì nếu ngược lại thì

$$M \tilde{=} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(M,\mathbb{F}_2),\mathbb{F}_2)$$

sẽ bất biến dưới các tự đồng cấu của

$$E(M) \tilde{=} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(M,\mathbb{F}_2),\mathbb{F}_2).$$

Vì vậy, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(M,\mathbb{F}_2)$ không là xạ ảnh.

pISSN 1859-1388
eISSN 2615-9678

Định nghĩa 1.5. Một R-môđun phải M được gọi là thỏa mãn tính chất trao đổi nếu với mọi R-môđun phải A và hai sự phân tích thành tổng trực tiếp $A = M' \oplus N = \oplus_{i\in I} A_i$ với $M \cong M'$ thì tồn tại môđun con B_i của A_i sao cho $A = M' \oplus (\oplus_{i\in I} B_i)$. Nếu điều này đúng với $|I| < \infty$ thì M được gọi là thỏa mãn tính chất trao đổi hữu hạn.

Trong [10], Crawley-Jonnson đặt ra câu hỏi: "Khi nào thì một môđun thỏa mãn tính chất trao đổi hữu hạn cũng sẽ thỏa mãn tính chất trao đổi?". Chúng tôi trả lời được một phần câu hỏi này đối với môđun tựa xạ ảnh bé trong Định lý 2.6, với môđun M là tựa xạ ảnh bé với phủ xạ ảnh $p: X \to M$ trên một vành hoàn chỉnh R, khi đó M là môđun tựa rời rạc khi và chỉ khi $End(M)/\nabla(M)$ ổn định với phép nhân bên trái bởi các lũy đẳng của $\dfrac{End(X)}{J(End(X))}$. Lúc này, nếu M có tính chất trao đổi hữu hạn, thì M cũng có tính chất trao đổi.

2 Các kết quả

Chú ý 2.1. (1) Trong toàn bộ bài báo này, chúng tôi xét các môđun trên vành hoàn chỉnh phải. Chú ý rằng nếu X là môđun xạ ảnh trên vành hoàn chỉnh R thì $End(X)/J(End(X))$ là vành chính quy và mỗi phần tử lũy đẳng của nó nâng được modulo $J(End(X))$, đồng thời ta cũng có $\nabla(X) = J(End(X))$.

(2) Giả sử M là R-môđun phải tựa xạ ảnh bé. Cho $p: X \to M$ là một phủ xạ ảnh và $g \in \nabla(X)$. Khi đó tồn tại một đồng cấu $f \in \nabla(M)$ thỏa mãn $f \circ p = p \circ g$. Bởi vì nếu p là toàn cấu bé, thì ánh xạ
$\theta: \nabla(X) \to \nabla(M)$
biến $g \mapsto f$ là một đồng cấu nhóm song ánh mà hạt nhân gồm các tự đồng cấu $g \in \nabla(X)$ thỏa mãn $p \circ g = p$.

Từ định nghĩa của R-môđun phải xạ ảnh bé và chú thích trên ta có các kết quả sau:

Hệ quả 2.2. *Các điều kiện sau đây là tương đương trên một R-môđun phải M với một phủ xạ ảnh $p: X \to M$:*

(1) *M là môđun tựa xạ ảnh bé.*

(2) *Với mỗi $g \in J(End(X))$ đều tồn tại một đồng cấu $f \in End(M)$ sao cho $f \circ p = p \circ g$.*

Cho M là R-môđun phải và $p: X \to M$ là phủ xạ ảnh của M. Khi đó, ta có đồng cấu vành $\Phi: End(M) \to End(X)/J(End(X))$ được xác định bởi $\Phi(f) = \bar{f} + J(End(X))$, trong đó $\bar{f}: X \to X$ sao cho $p \circ \bar{f} = f \circ p$. Rõ ràng $\nabla(M) = Ker(\Phi)$, nên ta có đồng cấu vành $\bar{\Phi}: End(M)/\nabla(M) \to End(X)/J(End(X))$. Đồng nhất $End(M)/\nabla(M)$ với $Im(\Phi)$, ta có thể xem rằng $End(M)/\nabla(M)$ là một vành con của $End(X)/J(End(X))$.

Định lý 2.3. *Cho M là R-môđun phải tựa xạ ảnh bé với $p: X \to M$ là phủ xạ ảnh. Khi đó:*

(1) $\nabla(M) \le J(End(M))$.

(2) *Các phần tử lũy đẳng của $End(M)$ nâng được modulo $\nabla(M)$.*

Chứng minh. (1) Theo giả thiết, ta có $\nabla(X) = J(End(X))$ (Chú ý 2.1). Lấy j là một phần tử bất kỳ của $\nabla(M)$. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng $1-j$ là phần tử khả nghịch của $End(M)$. Vì p là một toàn cấu bé nên tồn tại $\bar{j}: X \to X$ với $p \circ \bar{j} = j \circ p$ và $\bar{j} \in \nabla(X) = J(End(X))$. Từ đây suy ra $1-\bar{j}$ là một đơn vị của $End(X)$ và $p \circ (1-\bar{j}) = (1-j) \circ p$. Mặt khác, luôn tồn tại một tự đồng cấu $h: X \to X$ thỏa mãn

$h \circ (1-\bar{j}) = (1-\bar{j}) \circ h = 1_X$,

suy ra $1_X - h = -\bar{j} \circ h \in J(End(X))$.

Vậy $1_X - h \in J(End(X))$. Theo giả thiết M là một

R-môđun phải tựa xạ ảnh bé, do đó tồn tại một tự đồng cấu của $\alpha: M \to M$ với $p \circ (1_X - h) = \alpha \circ p$. Khi đó ta có

$$(1-\alpha)\circ(1-j)\circ p = (1-\alpha)\circ p \circ (1-\bar{j})$$
$$= (1-\bar{j})\circ p \circ h = p$$

Vì p là toàn cấu nên $(1-\alpha)\circ(1-j) = 1_M$. Tương tự chúng ta cũng có $(1-\alpha)\circ(1-j) = 1_M$. (2) Lấy $e' + \nabla(M)$ là một lũy đẳng của $End(M)/\nabla(M)$ và $f' + J(End(X)) = \bar{\Phi}(e' + \nabla(M))$ với một tự đồng cấu f' của X thõa mãn $p \circ f' = e' \circ p$. Dễ dàng thấy $f' + End(X)$ là một lũy đẳng trong $End(X)/J(End(X))$. Vì các lũy đẳng là nâng được theo modulo $J(End(X))$, nên tồn tại một lũy đẳng f của $End(X)$ mà $f' = f + j$ với j nào đó trong $J(End(X))$. Từ tính chất tựa xạ ảnh bé của M, chúng ta suy ra tồn tại $e \in End(M)$ mà $p \circ j = e \circ p$, và do đó $p \circ f = (e' - e) \circ p$. Chú ý rằng p là một toàn cấu và $f^2 = f$, do đó

$$(e'-e)\circ p = p \circ f = (p \circ f)\circ f = ((e'-e)\circ p)\circ f$$
$$= (e'-e)^2 \circ p.$$

Điều này chỉ ra rằng $e' - e$ là một lũy đẳng của $End(M)$. Theo cách xác định của đồng cấu vành $\bar{\Phi}$, ta có

$$\bar{\Phi}(e' - e + \nabla(M)) = f' - j + J(End(X))$$
$$= f' + J(End(X))$$
$$= \bar{\Phi}(e' + \nabla(M)).$$

Chúng ta có $\bar{\Phi}$ là một đơn cấu và do đó $e' - e + \nabla(M) = e' + \nabla(M)$, suy ra mọi lũy đẳng là nâng được theo modulo $\nabla(M)$.

Chúng ta để ý rằng

$$End(M)/\nabla(M) \cong \operatorname{Im}(\bar{\Phi}) \le End(X)/J(End(X)).$$

Định lý 2.4. *Các điều kiện sau là tương đương trên một R-môđun phải M với một phủ xạ ảnh $p: X \to M$:*

(1) *M là môđun đối bất biến tự đẳng cấu.*

(2) *M là môđun tựa xạ ảnh bé và $End(M)/\nabla(M)$ ổn định với phép nhân bên trái bởi các phần tử khả nghịch của $End(X)/J(End(X))$.*

Chứng minh. (1)$\Rightarrow$(2) Rõ ràng một R-môđun phải đối bất biến tự đẳng cấu M là tựa xạ ảnh bé. Ta cần chỉ ra rằng $End(M)/\nabla(M)$ ổn định với phép nhân bên trái bởi các phần tử khả nghịch của $End(X)/J(End(X))$. Lấy $g + J(End(X))$ là một đơn vị của $End(X)/J(End(X))$. Theo giả thiết, tồn tại $g' + J(End(X)) \in End(X)/J(End(X))$ thỏa mãn $gg' + J(End(X)) = g'g + J(End(X)) = 1 + J(End(X))$. Dễ dàng kiểm tra gg' và $g'g$ là các đơn vị của $End(X)$. Do đó, g là một phần tử khả nghịch của $End(X)$. Mặt khác, vì M là đối bất biến tự đẳng cấu, nên tồn tại $f: M \to M$ là một tự đồng cấu của M thỏa mãn $p \circ g = f \circ p$. Điều này kéo theo $g + J(End(X)) \in \operatorname{Im}(\bar{\Phi})$, nghĩa là, $End(M)/\nabla(M)$ ổn định với phép nhân bên trái bởi các phần tử khả nghịch của $End(X)/J(End(X))$.

(2)$\Rightarrow$(1) Giả sử M là một R-môđun phải tựa xạ ảnh bé và $End(M)/\nabla(M)$ ổn định với phép nhân bên trái bởi các phần tử khả nghịch của $End(X)/J(End(X))$. Lấy g là một tự đẳng cấu của X. Khi đó $g + J(End(X))$ là một đơn vị của

$$\frac{End(X)}{J(End(X))},$$

và do đó $(g + J(End(X)))\operatorname{Im}(\bar{\Phi}) \subset \operatorname{Im}(\bar{\Phi})$ theo (2). Điều này có nghĩa là $g + J(End(X))$ là một phần tử của $\operatorname{Im}(\bar{\Phi})$; ta viết $g + J(End(X)) = \bar{\Phi}(f + \Delta(M))$ với f nào đó trong $End(M)$. Mặt khác, tồn tại một tự đồng cấu h của X sao cho $p \circ h = f \circ p$. Suy ra $g - h \in J(End(X))$. Từ tính chất tựa xạ ảnh bé của M, ta có $p \circ (g - h) = f' \circ p$ với $f' \in End(M)$ nào đó. Do vậy, $p \circ g = p \circ h + f' \circ p = p \circ f + f' \circ p = (f + f') \circ p.$

Ta có ngay lập tức hệ quả sau đây.

pISSN 1859-1388
eISSN 2615-9678

Hệ quả 2.5. *Cho M là một môđun phải trên vành hoàn chỉnh R. Khi đó M là môđun đối bất biến tự đẳng cấu khi và chỉ khi M là tựa xạ ảnh bé, và $End(M)/\nabla(M)$ ổn định với phép nhân bên trái bởi các phần tử khả nghịch của $End(E(M))/J(End(E(M)))$. Trong trường hợp này, M thỏa mãn tính chất trao đổi.*

Một *R*-môđun M được gọi là *rời rạc* nếu M thỏa mãn các điều kiện sau:

(D1) Với môđun con bất kỳ N của M đều tồn tại một hạng tử trực tiếp K của M sao cho $K \le N$ và $N/K \ll M/K$,

(D2) Nếu N là môđun con của M sao cho M/N đẳng cấu với một hạng tử trực tiếp của M, thì N cũng là một hạng tử trực tiếp của M.

Môđun M được gọi là *tựa rời rạc* nếu M thỏa mãn điều kiện (D1) và điều kiện sau:

(D3) Với các hạng tử trực tiếp K và L của M mà $M = K + L$, thì $K \cap L$ cũng là một hạng tử trực tiếp của M.

Định lý 2.6. *Các điều kiện sau là tương đương đối với một R-môđun phải tựa xạ ảnh bé M với $p: X \to M$ là phủ xạ ảnh trên vành hoàn chỉnh R:*

(1) M là môđun tựa rời rạc.

(2) $End(M)/\nabla(M)$ ổn định với phép nhân bên trái bởi các lũy đẳng của $\dfrac{End(X)}{J(End(X))}$.

Lúc này, nếu M có tính chất trao đổi hữu hạn, thì M cũng có tính chất trao đổi.

Chứng minh. $(1) \Rightarrow (2)$ Xét M là một R-môđun phải tựa xạ ảnh bé tựa rời rạc. Lấy $e' + \nabla(M)$ là một lũy đẳng của $\dfrac{End(M)}{\nabla(M)}$ và

$f' + J(End(X)) = \bar{\Phi}(e' + \nabla(M))$

với một tự đồng cấu f' của X thõa mãn $u \circ f' = e' \circ u$. Dễ dàng thấy $f' + J(End(X))$ là một lũy đẳng trong $\dfrac{End(X)}{J(End(X))}$. Do môđun M là tựa xạ ảnh bé nên tồn tại lũy đẳng e của $End(M)$ thỏa mãn $u \circ f' = e \circ u$, kéo theo $f' + J(End(X)) \in \mathrm{Im}(\bar{\Phi})$, nghĩa là $\dfrac{End(M)}{\nabla(M)}$ ổn định với phép nhân bên trái bởi lũy đẳng của $\dfrac{End(X)}{J(End(X))}$.

$(2) \Rightarrow (1)$ Giả sử M là một R-môđun phải tựa nội xạ cốt yếu và $\dfrac{End(M)}{\nabla(M)}$ ổn định với phép nhân bên trái bởi lũy đẳng của $\dfrac{End(X)}{J(End(X))}$. Theo Định lý 2.4 thì M là môđun đối bất biến tự đẳng cấu, mà trên vành hoàn chỉnh thì môđun đối bất biến tự đẳng cấu là môđun tựa xạ ảnh (Theo [9, Định lý 30]) nên M cũng là môđun tựa xạ ảnh. Mặt khác, theo [5, Định lý 4.41], thì trên vành hoàn chỉnh phải R, mọi R-môđun tựa xạ ảnh đều là môđun rời rạc, do đó M là môđun rời rạc nên nó là tựa rời rạc.

Ngoài ra, cũng trong [5] các tác giả đã chứng minh rằng đối với một môđun tựa rời rạc M, nếu M thỏa mãn tính chất trao đổi hữu hạn thì M cũng thỏa mãn tính chất trao đổi. Kết quả sau mang lại cho chúng ta một đặc trưng của các môđun xạ ảnh bé.

Định lý 2.7. *Cho R là vành hoàn chỉnh và M, N là các R-môđun phải với các phủ xạ ảnh $\pi_1: P_1 \to M, \pi_2: P_2 \to N$. Các điều kiện sau là tương đương:*

(1) M là N-xạ ảnh bé.

(2) Với mỗi R-đồng cấu $f: P_1 \to P_2$ của các R-môđun phải với ảnh bé, $f(\mathrm{Ker}(\pi_1)) \le \mathrm{Ker}(\pi_2)$.

Chứng minh. Theo [1, Định lý 3.10].

Khi cho $N = M$, ta thu được hệ quả sau.

Hệ quả 2.8. *Cho R là vành hoàn chỉnh. Các điều kiện sau là tương đương trên môđun phải M có phủ xạ ảnh $\pi: P \to M$:*

1. *M là môđun tựa xạ ảnh bé.*

2. $\mathrm{Ker}(\pi)$ *bất biến dưới các tự đồng cấu của* P *với ảnh bé.*

Một R-môđun phải M được gọi là *V-môđun* (hay *môđun đối nửa đơn*) nếu mọi môđun con của M là giao của các môđun con cực đại của M. Vành R là *V-vành phải* nếu R_R là V-môđun. Như chúng ta đã biết, một R-môđun phải M là V-môđun khi và chỉ khi mọi R-môđun phải đơn là M-nội xạ.

Bổ đề 2.9. ([11, Bổ đề 1]) *Các điều kiện sau là tương đương đối với R-môđun phải M:*

(1) *M không là V-môđun.*

(2) *Tồn tại một môđun con* N *của* M *sao cho* M/N *là thành phần R-môđun phải không đơn có đế đơn.*

Kết quả sau cho chúng ta một số tính chất của V-vành thông qua tính xạ ảnh bé và nội xạ cốt yếu.

Định lý 2.10. *Các điều kiện sau là tương đương trên một vành* R *:*

(1) $R/Soc(R_R)$ *là* V *-vành phải.*

(2) *Mọi* R *-môđun phải là xạ ảnh bé.*

(3) *Mọi* R *-môđun phải hữu hạn sinh là xạ ảnh bé.*

(4) *Mọi* R *-môđun phải xiclic là xạ ảnh bé.*

(5) *Mọi* R *-môđun phải nửa đơn là xạ ảnh bé.*

(6) *Mọi* R *-môđun phải đơn là xạ ảnh bé.*

(7) *Mọi* R *-môđun phải đơn là nội xạ cốt yếu.*
Chứng minh. Theo [1, Định lý 3.14].

Hệ quả 2.11. *Các điều kiện sau là tương đương trên một vành nửa Artin phải* R *:*

(1) R *không suy biến phải và* $R/Soc(R_R)$ *là* V *-vành phải.*

(2) R *không suy biến phải và mọi* R *-môđun phải (đơn, nửa đơn) là xạ ảnh bé.*

(3) R *không suy biến phải và mọi* R *-môđun phải đơn là nội xạ cốt yếu.*

(4) *Mọi* R *-môđun phải suy biến là nội xạ.*
Chứng minh. Theo [1, Hệ quả 3.15].

Hệ quả 2.12. *Các điều kiện sau là tương đương trên một vành hoàn chỉnh phải* R *:*

(1) R *không suy biến phải và* $R/Soc(R_R)$ *là vành Artin nửa đơn.*

(2) R *là vành di truyền phải với* $J^2(R)=0$.

(3) R *không suy biến phải và mỗi R-môđun phải (đơn, nửa đơn) là xạ ảnh bé.*

(4) R *là vành di truyền phải và mỗi R-môđun phải (đơn, nửa đơn) là xạ ảnh bé.*

(5) R *không suy biến phải và mỗi R-môđun phải (đơn, nửa đơn) là nội xạ cốt yếu.*

(6) R *là vành di truyền phải và mỗi R-môđun phải (đơn, nửa đơn) là nội xạ cốt yếu.*

(7) *Mỗi R-môđun phải suy biến (đơn, nửa đơn) là nội xạ.*

Cho M và N là các R-môđun phải. Môđun M được gọi là *N-hầu nội xạ* nếu với mỗi môđun con N_1 của N và mỗi đồng cấu $f: N_1 \to M$, thì hoặc có đồng cấu $g: N \to M$ sao cho $f = g \circ \iota$, hoặc có một lũy đẳng khác không $\pi \in End(N)$ và một đồng cấu $h: M \to \pi(N)$ sao cho $h \circ f = \pi \circ \iota$, trong đó $\iota: N_1 \to N$ là phép nhúng của N_1 vào trong N. Môđun M được gọi là *hầu nội xạ* nếu nó là hầu nội xạ với mọi R-môđun phải. Rõ ràng mọi R-môđun phải hầu nội xạ đều là nội xạ cốt yếu. Môđun M được gọi là N*-hầu xạ ảnh* nếu với mọi phép chiếu chính tắc $g: N \to N/K$ và mọi đồng cấu $f: M \to N/K$, thì hoặc có một đồng cấu $h: M \to N$ sao cho $f = g \circ h$ hoặc có một hạng tử trực tiếp khác không N_1 của N và một đồng cấu $h_1: N_1 \to M$ mà $g \circ \iota = f \circ h_1$, trong đó $\iota: N_1 \to N$ là phép

pISSN 1859-1388
eISSN 2615-9678

nhúng của N_1 vào trong N. Môđun M là *hầu xạ ảnh* nếu nó là hầu xạ ảnh với mọi R-môđun phải

Định lý 2.13. *Cho vành* R. *Khi đó ta có các khẳng định sau:*

(1) *Nếu mọi* R *-môđun phải là nội xạ cốt yếu thì mọi* R *-môđun phải cũng là xạ ảnh bé.*

(2) *Nếu mọi* R *-môđun phải là hầu nội xạ thì mọi* R *-môđun phải cũng là hầu xạ ảnh.*

Chứng minh. Theo [1, Định lý 3.17].

Tài liệu tham khảo

1. Quynh TC, Abyzov AN. Hà NTT, Yildirim T. Modules close to the automorphism-invariant and coinvariant. J Algebra and its Appl. 2019;18(12):1950235.
2. Anderson FW, Fuller KR. Rings and Categories of Modules. New York: Springer-Verlag; 1974.
3. Dung NV, Huynh DV, Smith PF, Wisbauer R. Extending modules. Pitman Research Notes in Math. New York: Longman. Harlow; 1994.
4. Asensio PA, Tütüncü DK, Srivastava AK. Modules invariant under automorphisms of their covers and envelopes. Israel J Math. 2015;206:457-482.
5. Mohammed SH, Müller J. Continous and Discrete Modules. Cambridge: Cambridge Univ Press; 1990. 126 p.
6. Nicholson WK, Yousif MF. Quasi-Frobenius Rings. Cambridge: Cambridge Univ Press; 2003. Background; p. 1-35.
7. Wisbauer R. Foundations of Module and Ring Theory. Düsseldorf: Gordon and Breach, Reading; 1991.
8. Clark J, Lomp C, Vanaja N, Wisbauer R. Lifting Modules: Supplements and projectivity in module theory. Basel: Birkhauser Verlag; 2006.
9. Singh S, Srivastava AK. Dual automorphism-invariant modules. J Algebra. 2012;371:262-275.
10. Crawley P, Jonnson B. Refinements for infinite direct decompositions of algebraic systems. Pacific J Math. 1964;14 (3):755-1127.
11. Abyzov AN. Almost Projective and Almost Injective Modules. Mathematical Notes. 2018;103:3-17.