Tạp chí Khoa học Đại học Huế: Khoa học Tự nhiên
Tập 130, Số 1C, 15–22, 2021

pISSN 1859-1388
eISSN 2615-9678

VỀ CHỈ SỐ CHÍNH QUY CASTELNUOVO-MUMFORD CỦA VÀNH TỌA ĐỘ CỦA TẬP $n+3$ ĐIỂM BÉO KHÔNG SUY BIẾN TRONG KHÔNG GIAN XẠ ẢNH $\mathbb{P}^n$

Phan Văn Thiện[1], Trần Nam Sinh[2]*, Nguyễn Thanh Quang[3]

[1] Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế, 34 Lê Lợi, Huế, Việt Nam
[2] Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng, 459 Tôn Đức Thắng, Quận Liên Chiểu, Đà Nẵng, Việt Nam
[3] Trường THPT Chuyên Lê Khiết, 112 Chu Văn An, Tp. Quảng Ngãi, Quảng Ngãi, Việt Nam

* Tác giả liên hệ Trần Nam Sinh <tnsinh@ued.udn.vn>
(*Ngày nhận bài: 17-05-2021; Ngày chấp nhận đăng: 24-06-2021*)

Tóm tắt. Trong bài báo này chúng tôi tính chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của vành tọa độ của tập $n+3$ điểm béo không suy biến trong $\mathbb{P}^n$ cho hầu hết các trường hợp của tập điểm.

Từ khóa: tập điểm béo, chỉ số chính quy, hàm Hilbert, vành tọa độ

On the Castelnuovo-Mumford regularity index of the coordinate ring of a set of $n+3$ non-degenerate fat points in projective space $\mathbb{P}^n$

Phan Van Thien[1], Tran Nam Sinh[2]*, Nguyen Thanh Quang[3]

[1] University of Education, Hue University, 34 Le Loi St., Hue, Vietnam
[2] The University of Da Nang – University of Science and Education, 459 Ton Duc Thang St., Lien Chieu, Da Nang, Vietnam
[3] Le Khiet High School for the Gifted, 112 Chu Van An St., Quang Ngai City, Quang Ngai, Vietnam

* Correspondence to Tran Nam Sinh <tnsinh@ued.udn.vn>
(*Received: 17 May 2021; Accepted: 24 June 2021*)

Abstract. In this paper we calculate the Castelnuovo-Mumford regularity index of the coordinate ring of a set of $n+3$ non-degenerate fat points in $\mathbb{P}^n$ for almost all of cases.

Keywords: fat points, regularity index, Hilbert function, coordinate ring

1 Mở đầu

Cho $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}_k^n$ là một không gian xạ ảnh trên trường đóng đại số k và $P_1,...,P_s$ là các điểm phân biệt trong $\mathbb{P}^n$. Cho $R := k[x_0, x_1,..., x_n]$ là vành đa thức theo $n+1$ biến $x_0, x_1,..., x_n$ với hệ số trên k. Với mỗi $i = 1,...,s$; ký hiệu $\wp_i$ là iđêan nguyên tố thuần nhất trong R, xác định bởi điểm P_i. Cho $m_1,...,m_s$ là các số nguyên dương. Lược đồ chiều không xác định bởi iđêan $I = \wp_1^{m_1} \cap \cdots \cap \wp_s^{m_s}$ được gọi là tập s điểm béo trong $\mathbb{P}^n$ và được ký hiệu bằng $Z = m_1P_1 + \cdots + m_sP_s$.

DOI: 10.26459/hueunijns.v130i1C.6334

Vành tọa độ thuần nhất của Z là $A := R/I$. Đây là một vành phân bậc, $A = \oplus_{t\geq 0} A_t$, có số bội $e(A) := \sum_{i=1}^{s} \binom{m_i + n - 1}{n}$. Với mỗi $t \in \mathbb{N}$, phần phân bậc A_t là một k-không gian véc tơ hữu hạn chiều. Hàm số $H_Z(t) = \dim_k A_t$ được gọi là hàm Hilbert của Z. Hàm $H_Z(t)$ tăng chặt cho đến khi đạt được số bội $e(A)$ tại đó nó dừng. Chỉ số chính quy của Z là số nguyên dương t bé nhất sao cho $H_Z(t) = e(A)$ và nó được ký hiệu là $reg(Z)$. Chỉ số chính quy $reg(Z)$ cũng chính là chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford $reg(A)$ của vành tọa độ A.

Việc tính được giá trị của $reg(Z)$ là rất khó, vì vậy người ta tìm cách chặn trên cho $reg(Z)$. Từ năm 1961 đến nay, đã có nhiều kết quả về chặn trên cho $reg(Z)$ được công bố [1-4, 6, 7] và hiện nay bài toán chặn trên cho $reg(Z)$ đã được Nagel và Trok giải quyết thành công trong trường hợp tổng quát [5] Tuy nhiên, hiện nay các kết quả về việc tính $reg(Z)$ đang còn rất khiêm tốn, chỉ có vài kết quả được đăng trên tạp chí uy tín như sau.

Cho tập điểm béo $Z = m_1P_1 + \cdots + m_sP_s$ trong $\mathbb{P}^n$, Davis và Geramita [3] đã tính được

$reg(Z) = m_1 + \cdots + m_s - 1$

khi $P_1, \ldots, P_s$ nằm trên cùng một đường thẳng. Tập điểm $\{P_1, \ldots, P_s\}$ trong $\mathbb{P}^n$ gọi là ở vị trí tổng quát nếu không có $j+1$ điểm nằm trên cùng một $(j-1)$-phẳng, $j = 1, \ldots, n$. Cho a là một số hữu tỷ. Ký hiệu $[a]$ là phần nguyên của a. Catalisano và cs. [2] đã tính được $reg(Z)$ trong hai trường hợp:

– Nếu $s \geq 2$, $2 \leq m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_s$ và $P_1, ..., P_s$ nằm trên một đường cong hữu tỷ chuẩn trong $\mathbb{P}^n$, thì $reg(Z) = \max\{m_1 + m_2 - 1, [(\sum_{i=1}^{s} m_i + n - 2)/n]\}$.

– Nếu $n \geq 3, 2 \leq s \leq n+2, 2 \leq m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_s$ và $P_1, ..., P_s$ nằm ở vị trí tổng quát trong $\mathbb{P}^n$, thì

$reg(Z) = m_1 + m_2 - 1.$

Đặt

$$T_j = \max\{[\frac{\sum_{i_l=1}^{q} m_{i_l} + j - 2}{j}] \mid P_{i_1}, ..., P_{i_q}$$

nằm trên một j-phẳng}.

Thiện [8] đã tính được

$reg(Z) = \max\{T_j \mid j = 1, ..., n\}$

cho $Z = m_1P_1 + \cdots + m_{s+2}P_{s+2}$ với $P_1, \ldots, P_{s+2}$ không nằm trên cùng một $(s-1)$-phẳng trong $\mathbb{P}^n$, $s \leq n$; và vào năm 2017, Thiện và Sinh [10] đã tính được $reg(Z) = \max\{T_j \mid j = 1, ..., n\}$

cho $Z = mP_1 + \cdots + mP_{s+3}$ với $m \neq 2$ và $P_1, \ldots, P_{s+3}$ không nằm trên $(r-1)$-phẳng trong $\mathbb{P}^n$, $s \leq r+3$. Thiện và Trinh [11] đã đưa ra những ước lượng (chặn trên và chặn dưới) cho $reg(Z)$ trong một số trường hợp của tập điểm béo. Tập các điểm béo $Z = m_1P_1 + \cdots + m_sP_s$ gọi là không suy biến trong $\mathbb{P}^n$ nếu $P_1, \ldots, P_s$ không cùng nằm trong một siêu phẳng. Ballico và cs. [1] đã chỉ ra chặn trên cho chỉ số chính quy của tập $n+3$ điểm béo $Z = m_1P_1 + \cdots + m_{n+3}P_{n+3}$ không suy biến trong P^n: $reg(Z) \leq \max\{T_j \mid j = 1, ..., n\}$.

Trong bài báo này, bằng cách sử dụng chặn trên của Ballico và cs. [1], các kết quả về chặn dưới cho chỉ số chính quy của tập các điểm béo [9] và một số kết quả khác, chúng tôi tính $reg(Z)$ cho hầu hết các trường hợp của tập $n+3$ điểm béo không suy biến trong $\mathbb{P}^n$ (Định lý 2.5). Các kết quả của chúng tôi là mới.

2 Các kết quả

Đầu tiên chúng tôi tính chỉ số chính quy của tập $n+3$ điểm béo không suy biến trong $\mathbb{P}^n$; $n = 1, 2$.

Mệnh đề 2.1. *Cho* $X = \{P_1, ..., P_{n+3}\}$ *là một tập* $n+3$ *điểm phân biệt không suy biến trong* $\mathbb{P}^n$; $n = 1, 2$

pISSN 1859-1388
eISSN 2615-9678

. Cho $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_{n+3}$ *là các số nguyên dương và* $Z = m_1P_1 + \cdots + m_{n+3}P_{n+3}$. *Khi đó,*

$$reg(Z) = \max\{T_j \mid j = 1,...,n\},$$

trong đó

$$T_j = \max\{[\frac{\sum_{l=1}^{q} m_{i_l} + j - 2}{j}] \mid P_{i_1},...,P_{i_q}$$

nằm trên một j-phẳng$\}$.

Chứng minh: Đặt $T = \max\{T_j \mid j = 1,...,n\}$.

Ta sẽ chứng minh $reg(Z) = T$. Với $n = 1$: theo [3, Corollary 3], ta có

$$reg(Z) = m_1 + \cdots + m_4 - 1 = T.$$

Với $n = 2$: Nếu tập điểm X ở vị trí tổng quát thì theo [10, Theorem 3.1], ta có

$$reg(Z) = T.$$

Nếu tập X không ở vị trí tổng quát thì X nằm trên hai đường thẳng, gọi là l_1 và l_2. Có thể giả sử rằng $T_1 = m_1 + \cdots + m_r - 1$ với $P_1,...,P_r$ nằm trên l_1. Đặt $I = \wp_1^{m_1} \cap \cdots \cap \wp_5^{m_5}$. Khi đó

$$reg(Z) = reg(R/I)$$

và

$$T_1 + 1 \geq [\frac{m_1 + \cdots + m_5}{2}] = T_2.$$

Có hai trường hợp sau cho T_1 và T_2.

- $T_1 \geq T_2$: Khi đó $T = T_1$. Đặt $U = m_1P_1 + \cdots + m_rP_r$. Sử dụng [3, Corollary 3] và [9, Proposition 6], ta có

$$reg(Z) \geq reg(U) = T_1.$$

Hơn nữa, theo [1, Theorem 2.1], ta có

$$reg(Z) \leq T = T_1.$$

Từ đó ta nhận được $reg(Z) = T_1 = T$.

- $T_2 > T_1$: Khi đó $T = T_2$ và $T_2 = T_1 + 1$. Theo [1, Theorem 2.1], ta có

$$reg(Z) \leq T_2.$$

Vì vậy, ta còn phải chứng minh $reg(Z) \geq T_2$. Ta có $P_1,...,P_5 \in l_1 \cup l_2$, với $P_1,...,P_r$ nằm trên l_1 và $P_{r+1},...,P_5$ nằm trên l_2. Do

$$[\frac{m_1 + \cdots + m_5}{2}] = T_2 = T_1 + 1 \geq m_1 + \cdots + m_r$$

nên $m_{r+1} + \cdots + m_5 \geq m_1 + \cdots + m_r$. Vì vậy,

$$T_2 = [\frac{m_1 + \cdots + m_5}{2}]$$

$$\leq [\frac{2(m_{r+1} + \cdots + m_5)}{2}]$$

$$= m_{r+1} + \cdots + m_5.$$

Hơn nữa, $T_2 = T_1 + 1 \geq m_{r+1} + \cdots + m_5$ nên $T_2 = m_{r+1} + \cdots + m_5$.

Ta chọn $\wp_5 = (x_1, x_2), \wp_1 = (x_0, x_2), \wp_r = (x_0, x_1)$ và $\wp_j = (x_0, a_jx_2 - b_jx_1), j = 2,...,r-1.$

Bởi vì $$x_0^{T_2 - m_5} x_1^{m_5 - 1} \notin (x_0, x_2)^{m_1} \cap (x_0, a_2x_2 - b_2x_1)^{m_2} \cap \cdots \cap (x_0, a_{r-1}x_2 - b_{r-1}x_1)^{m_{r-1}} \cap (x_0, x_1)^{m_r} + (x_1, x_2)^{m_5}$$

suy ra $x_0^{T_2 - m_5} x_1^{m_5 - 1} \notin J + \wp_5^{m_5}$ nên theo [2, Lemma 3], ta có $reg(R/(J + \wp_5^{m_5})) \geq T_2$.

Sử dụng [2, Lemma 1], ta có

$$reg(Z) = reg(R/(J + \wp_5^{m_5})) \geq T_2.$$

Mệnh đề 2.1 đã được chứng minh xong. □

Kết quả sau đây giúp chúng tôi tính chỉ số chính quy của tập điểm béo không suy biến trong $\mathbb{P}^n$, $n \geq 3$.

Mệnh đề 2.2. *Cho* $n \geq 3$ *là số nguyên và* $X = \{P_1,...,P_{n+3}\}$ *là một tập* $n+3$ *điểm phân biệt không suy biến trong* $\mathbb{P}^n$ *sao cho không có* $s+3$ *điểm nào của* X *nằm trên một* s *-phẳng,* $s < n$. *Cho* $2 \leq m_1 \geq \cdots \geq m_{n+3}$ *là các số nguyên dương và* $Z = m_1P_1 + \cdots + m_{n+3}P_{n+3}$. *Đặt* $T = \max\{T_j \mid j = 1,...,n\}$,

với $$T_j = \max\{[\frac{\sum_{l=1}^{q} m_{i_l} + j - 2}{j}] \mid P_{i_1},...,P_{i_q}$$

nằm trên một j-phẳng$\}$.

Khi đó, nếu

$T = T_1$ hoặc $T = T_2$ *thì* $reg(Z) = T.$

Chứng minh: Xét hai trường hợp sau cho T.

- $T = T_1$: Gọi ℓ là đường thẳng đi qua các điểm $P_{i_1},\dots,P_{i_r}, r \le 3$ sao cho $T_1 = m_{i_1} + \cdots + m_{i_r}$. Xét tập điểm béo $Z = m_1P_1 + \cdots + m_{n+3}P_{n+3}$ và tập điểm béo $Y = m_{i_1}P_{i_1} + \cdots + m_{i_r}P_{i_r}$. Sử dụng [3, Corollary 3] và [9, Proposition 6], ta có

$reg(Z) \ge reg(Y) = T_1 = T.$

Theo [1, Theorem 2.1], ta có $reg(Z) \le T = T_1.$

Từ đó $reg(Z) = T.$

- $T > T_1$: Khi đó $T = T_2$, không có 3 điểm của X nằm trên một đường thẳng và không có 5 điểm của X nằm trên một 2-phẳng. Gọi γ là 2-phẳng đi qua các điểm $P_{i_1},\dots,P_{i_q}, q \le 4,$ sao cho

$$T_2 = [\frac{\sum_{l=1}^{q} m_{i_l}}{2}].$$

Xét tập điểm béo $U = m_{i_1}P_{i_1} + \cdots + m_{i_q}P_{i_q}$, theo [8, Theorem 3.4], ta có $reg(U) = T_2$. Sử dụng [9, Proposition 6], ta có $reg(Z) \ge reg(U) = T_2.$

Mặt khác, theo [1, Theorem 2.1], ta có $reg(Z) \le T = T_2.$

Từ đó ta nhận được $reg(Z) = T.$

Mệnh đề 2.2 đã được chứng minh. □

Trong mệnh đề tiếp theo sau đây chúng tôi sẽ tính chỉ số chính quy của tập 6 điểm béo không suy biến trong $\mathbb{P}^3$.

Mệnh đề 2.3. *Cho* $X = \{P_1,\dots,P_6\}$ *là một tập* 6 *điểm phân biệt không suy biến trong* $\mathbb{P}^3$ *sao cho không có* $s+3$ *điểm nào của* X *nằm trên một* s*-phẳng,* $s < 3.$ *Cho* $2 \le m_1 \ge \cdots \ge m_6$ *là các số nguyên dương và* $Z = m_1P_1 + \cdots + m_6P_6$*. Đặt*

$$T_j = \max\{[\frac{\sum_{l=1}^{q} m_{i_l} + j - 2}{j}] \mid P_{i_1},\dots,P_{i_q}$$

nằm trên một j-phẳng\}. Ta có,

$reg(Z) = \max\{T_j \mid j = 1,2,3\}$

ngoại trừ trường hợp bao gồm các điều kiện: $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 + 1 = m$*, không có* 3 *điểm nằm trên một đường thẳng, có một* 2*-phẳng đi qua* P_6 *và* 3 *điểm của* $\{P_1,\dots,P_5\}$*. Trong trường hợp này, ta có* $T_1 = T_2 = 2m - 1,\ T_3 = 2m$ *và*

$reg(Z) = 2m - 1$ hay $reg(Z) = 2m.$

Chứng minh: Đặt

$T = \max\{T_j \mid j = 1,2,3\}.$

Xét hai trường hợp sau đây của tập điểm X.

Trường hợp 1:

$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 + 1 = m$. Ta chia thành hai trường hợp con sau:

Trường hợp 1.a: X ở vị trí tổng quát. Khi đó, $T_1 = 2m - 1,\ T_2 = [\frac{3m}{2}]$ và

$T_3 = [\frac{m_1 + \cdots + m_6 + 1}{3}] = 2m$. Sử dụng [10, Theorem 3.1], ta có $reg(Z) = 2m = T.$

Trường hợp 1.b: X không ở vị trí tổng quát. Khi đó, có một trong hai khả năng sau:

- X có ba điểm nằm trên một đường thẳng. Do không có $s+3$ điểm nào của X nằm trên s-phẳng, $s < 3$, nên không có 4 điểm của X nằm trên một đường thẳng. Gọi ℓ là đường thẳng đi qua ba điểm của X. Ta có $T_1 = 3m - 1$ (nếu ℓ không đi qua P_6) hoặc $T_1 = 3m - 2$ (nếu ℓ đi qua P_6), $T_2 \le 2m, T_3 = 2m.$ Do đó

$T = \max\{T_1, T_2, T_3\} = T_1.$

Sử dụng [3, Corollary 3] và [9, Proposition 6], ta có $reg(Z) \ge T_1.$

pISSN 1859-1388
eISSN 2615-9678

Hơn nữa, theo [1, Theorem 2.1], ta có $reg(Z) \le T$.

Từ đó ta nhận được $reg(Z) = T_1 = T$.

- X không có ba điểm nằm trên một đường thẳng. Khi đó $T_1 = 2m-1$, $T_3 = 2m$ và có bốn điểm của X nằm trên 2-phẳng và không có năm điểm của X nằm trên 2-phẳng. Gọi β là 2-phẳng đi qua bốn điểm của X, gọi là $P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3}, P_{i_4}$, sao cho

$$T_2 = [\frac{m_{i_1} + m_{i_2} + m_{i_3} + m_{i_4}}{2}].$$

Nếu β không đi qua P_6, thì $T_2 = 2m.$ Suy ra $T = T_2$. Theo Mệnh đề 2.2, ta có

$$reg(Z) = T = 2m.$$

Nếu β đi qua P_6, thì $T_2 = [\frac{4m-1}{2}] < 2m = T_3$. Hơn nữa $T_1 = 2m-1$. Do đó $T = T_3 = 2m$. Đặt $Y = mP_1 + mP_2$, khi đó theo [3, Corollary 3] và [9, Proposition 6], ta có $reg(Z) \ge reg(Y) = T_1 = 2m-1$.

Mặt khác, theo [1, Theorem 2.1], ta có $reg(Z) \le T = \max\{T_1, T_2, T_3\} = 2m.$

Suy ra $2m-1 \le reg(Z) \le 2m$. Vậy,

$reg(Z) = 2m-1$ hoặc $reg(Z) = 2m$.

Trường hợp 2: Các m_i không thỏa $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 + 1 = m$. Nếu X nằm ở vị trí tổng quát, thì theo [10, Theorem 3.1], ta có $reg(Z) = T$.

Nếu X không ở vị trí tổng quát thì sẽ có hai trường hợp sau.

Trường hợp 2.a: $m_1 = m_2 = \cdots = m_6 = m.$ Ta có $T_3 = 2m$. Do X không nằm ở vị trí tổng quát nên sẽ có 3 điểm nằm trên một đường thẳng hay có 4 điểm nằm trên một 2- phẳng. Khi đó, $T_1 = 3m-1$ hay $T_2 = 2m$, nên $T = T_1$ hay $T = T_2$. Theo Mệnh đề 2.2, ta có $reg(Z) = T$.

Trường hợp 2.b: Các m_i không nằm trong Trường hợp 2.a. Khi đó ta có các trường hợp sau:

i) $m_1 = m+1, m_2 = \cdots = m_6 = m$.

Khi đó, $T_3 = [\frac{6m+2}{3}] = 2m,$

$T_1 \ge m_1 + m_2 - 1 = 2m.$ Vì vậy, $T = \max\{T_1, T_2\}.$ (3.1)

ii) Hoặc $m_1 \ge m_5 + 1, m_2 \ge m_6 + 1$ hoặc $m_1 \ge m_6 + 2.$

- Nếu $m_1 \ge m_5 + 1, m_2 \ge m_6 + 1$:

Ta có

$$m_1 + m_2 - \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_6 + 1}{3}$$
$$= \frac{2m_1 + 2m_2 - m_3 - m_4}{3}$$
$$+ \frac{-m_5 - m_6 - 1}{3}$$
$$\ge \frac{(m_1 - m_3) + (m_2 - m_4)}{3}$$
$$+ \frac{[m_1 + (m_5 + 1)]}{3}$$
$$+ \frac{[m_2 - (m_6 + 1) + 1}{3} > 0.$$

Vì vậy,

$$m_1 + m_2 > \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_6 + 1}{3}.$$

Suy ra $m_1 + m_2 > [\frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_6 + 1}{3}].$

Do đó, $m_1 + m_2 - 1 \ge [\frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_6 + 1}{3}]$,

hay $T_1 \ge T_3.$ (3.2)

- Nếu $m_1 \ge m_6 + 2$:, ta có

$$m_1 + m_2 - \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_6 + 1}{3}$$
$$= \frac{2m_1 + 2m_2 - m_3 - m_4}{3}$$
$$- \frac{-m_5 - m_6 - 1}{3}$$
$$\ge \frac{(m_1 - m_3) + (m_2 - m_4) + (m_2 - m_5)}{3}$$

DOI: 10.26459/hueunijns.v130i1C.6334

$$+\frac{[m_1-(m_6+2)]+1}{3}>0.$$

Vì vậy, $m_1+m_2>\frac{m_1+m_2+\cdots+m_6+1}{3}.$

Suy ra $m_1+m_2>[\frac{m_1+m_2+\cdots+m_6+1}{3}].$

Do đó, $m_1+m_2-1\geq[\frac{m_1+m_2+\cdots+m_6+1}{3}]$,

hay $T_1\geq T_3.$ (3.3)

Từ (3.2) và (3.3), ta có

$T=\max\{T_1,T_2\}.$ (3.4)

Từ (3.1), (3.4) và sử dụng Mệnh đề 2.2, ta có $reg(Z)=T.$

Mệnh đề 2.3 đã được chứng minh xong. □

Kết quả chính của bài báo này nằm trong Định lý 2.5. Bổ đề sau đây sẽ giúp chứng minh Định lý 2.5.

Bổ đề 2.4. *Cho $X=\{P_1,...,P_{n+3}\}$ là một tập $n+3$ điểm phân biệt không suy biến trong $\mathbb{P}^n$ sao cho không có $s+3$ điểm nào của X nằm trên một s-phẳng, $s<n.$ Cho $2\leq m_1\geq\cdots\geq m_{n+3}$ là các số nguyên dương và $Z=m_1P_1+\cdots+m_{n+3}P_{n+3}$. Với $k=1,\ldots,n$; đặt*

$$t_k=[\frac{\sum_{j=1}^{k+3}m_j+k-2}{k}].$$

Khi đó, $t_k\geq t_{k+1}.$

Suy ra $T_1\geq T_n,\forall n\geq 4.$

Chứng minh: Ta có

$$\frac{\sum_{j=1}^{k+3}m_j+k-2}{k}-\frac{\sum_{j=1}^{k+4}m_j+k-1}{k+1}$$

$$=\frac{(\sum_{j=1}^{k+3}m_j+k-2)(k+1)}{k(k+1)}$$

$$-\frac{(\sum_{j=1}^{k+4}m_j+k-1)k}{k(k+1)}$$

$$=\frac{(\sum_{j=1}^{k+3}m_j+k-2)k}{k(k+1)}$$

$$+\frac{(\sum_{j=1}^{k+3}m_j+k-2)}{k(k+1)}$$

$$-\frac{[(\sum_{j=1}^{k+3}m_j+k-2)+(m_{k+4}k+k)]}{k(k+1)}$$

$$=\frac{\sum_{j=1}^{k+3}m_j+k-2-km_{k+4}-k}{k(k+1)}$$

$$=\frac{(\sum_{j=1}^{k}m_j-km_{k+4})}{k(k+1)}$$

$$+\frac{\sum_{j=k+1}^{k+3}m_j-2}{k(k+1)}>0.$$

Do đó,

$$t_k\geq t_{k+1}.$$

Suy ra với mọi $n\geq 4,$ ta có $t_4\geq t_5\geq\cdots$ $\geq t_n.$ Mặt khác,

$$m_1+m_2-\frac{\sum_{j=1}^{7}m_j+2}{4}$$

$$=\frac{4(m_1+m_2)-\sum_{j=1}^{7}m_j-2}{4}$$

$$=\frac{(m_1-m_3)+\sum_{l=4}^{6}(m_2-m_l)}{4}$$

$$+\frac{(m_1-2)+(m_1-m_7)}{4}>0.$$

nên ta có $m_1+m_2>t_4.$ Từ đó, $m_1+m_2-1\geq t_4.$ Vì $T_1\geq m_1+m_2-1$ nên $T_1\geq t_k,\forall k\geq 4.$

Khi $k=n$, ta có $t_n=T_n,$ vì vậy,

$T_1\geq T_n,\forall n\geq 4.$

Định lý sau là kết quả chính của bài báo.

Định lý 2.5. *Cho $X=\{P_1,...,P_{n+3}\}$ là một tập $n+3$ điểm phân biệt không suy biến trong $\mathbb{P}^n$ sao cho không có $s+3$ điểm nào của X nằm trên một s-*

pISSN 1859-1388
eISSN 2615-9678

phẳng, $s < n$. *Cho* $2 \le m_1 \ge \cdots \ge m_{n+3}$ *là các số nguyên dương và* $Z = m_1P_1 + \cdots + m_{n+3}P_{n+3}$. *Khi đó,*

$$reg(Z) = \max\{T_j \mid j = 1,...,n\},$$

trong đó

$$T_j = \max\{[\frac{\sum_{l=1}^{q} m_{i_l} + j - 2}{j}] \mid P_{i_1},...,P_{i_q}$$

nằm trên một j-phẳng} ngoại trừ trường hợp bao gồm các điều kiện: $n = 3$, $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 + 1 = m$*, không có* 3 *điểm nằm trên một đường thẳng, có một* 2*-phẳng đi qua* P_6 *và* 3 *điểm của* $\{P_1,\ldots,P_5\}$. *Trong trường hợp này ta có* $T_1 = T_2 = 2m - 1$, $T_3 = 2m$ *và*

$reg(Z) = 2m - 1$ hay $reg(Z) = 2m$.

Chứng minh: Sử dụng Mệnh đề 2.1, ta thấy định lý đúng cho trường hợp $n = 1,2$. Sử dụng Mệnh đề 2.3, ta thấy định lý đúng cho trường hợp $n = 3$ (bao gồm trường hợp $n = 3$, $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 + 1 = m$ và có một 2-phẳng đi qua P_6 và 3 điểm của $\{P_1,\ldots,P_5\}$). Bây giờ ta sẽ chứng minh định lý đúng khi $n \ge 4$.

Đặt $T = \max\{T_j \mid j = 1,...,n\}$.

Với $j = 4,...,n$; từ Bổ đề 2.4 ta có $T_1 \ge T_j$. Vì vậy,

$$T = \max\{T_j \mid j = 1,2,3\}.$$

Theo giả thiết, không có $s + 3$ điểm của X nằm trên s-phẳng, nên có nhiều nhất $s + 2$ điểm nằm trên s-phẳng. Giả sử γ là 3-phẳng đi qua các điểm $P_{i_1},...,P_{i_r}, r \le 5$ sao cho

$$T_3 = [\frac{m_{i_1} + m_{i_2} + \cdots + m_{i_r} + 1}{3}].$$

Do $m_1 + m_2 - \dfrac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + 1}{3}$

$$= \frac{2m_1 + 2m_2 - m_3 - m_4 - m_5 - 1}{3} > 0$$

nên $m_1 + m_2 - 1 \ge$

$$[\frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + 1}{3}] \ge T_3.$$

Từ đó, $T = \max\{T_1, T_2\}$.

Sử dụng Mệnh đề 2.2, ta nhận được

$reg(Z) = T$.

Định lý 2.5 đã được chứng minh xong. □

Tài liệu tham khảo

1. Ballico E, Dumitrescu O, Postinghel E. On Segre's bound for fat points in Pn. Journal of Pure and Applied Algebra. 2016;220(6):2307-2323.
2. Catalisano MV, Trung NV, Valla G. A sharp bound for the regularity index of fat points in general position. Proceedings of The American Mathematical Scociety. 1993;18(3):717-724.
3. Davis ED, Geramita AV. The Hilbert function of a special class of 1-dimensional Cohen - Macaulay graded algebras. The Curves Seminar at Queen's, Queen's Paper in Pure and Apply Mathematical. 1984;67:1-29.
4. Fatabbi G, Lorenzini A. On a sharp bound for the regularity index of any set of fat points. Journal of Pure and Applied Algebra. 2001;161(1-2):91-111.
5. Nagel U, Trok B. Segre's regularity bound for fat point schemes. Annali della Scuola normale superiore di Pisa. Classe di scienze. 2020;20(1):217-237.
6. Serge B. Alcune questioni su insiemi finiti di punti in geometria algebrica. Atti del convegno internazionale di Torino. 1961;67-85.
7. Thien PV. Serge bound for the regularity index of fat points in P^3.Journal of Pure and Applied Algebra. 2000;151(2):197-214.
8. Thien PV. Regularity Index of *S* + 2 Fat Points not on a Linear (S − 1)-Space. Communications in Algebra. 2012;40(10):3704-3715.
9. Thien PV. Lower bound for the regularity index of fat points. International Journal of Pure and Apllied Mathematics. 2016;109(3):745-755.
10. Thien PV, Sinh TN. On the regularity index of *s* fat points not on a linear (*r*−*1*)-space, *s* ≤ *r* + *3*. Communications in Algebra. 2016;45(10):4123-4138.
11. Thien PV, Trinh TTV. An estimate of the regularity index of fat points in some cases. Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de

Rolando Eötvös Nominatae, Sectio computatorica. 2019;49:399-410.