Tạp chí Khoa học Đại học Huế: Khoa học Tự nhiên
Tập 131, Số 1A, 95–100, 2022

pISSN 1859-1388
eISSN 2615-9678

MÔĐUN BẤT BIẾN ĐẲNG CẤU TRÊN VÀNH GOLDIE PHẢI

Lê Văn Thuyết[1], Đào Thị Trang[1, 2*], Trương Công Quỳnh[3]

[1] Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế, 34 Lê Lợi, Huế, Việt Nam
[2] Trường Đại học Công nghiệp Thực phẩm Tp. HCM, 140 Lê Trọng Tấn, Tp. HCM. Việt nam
[3] Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng, 45 Tôn Đức Thắng, Đà Nẵng, Việt Nam

* Tác giả liên hệ Đào Thị Trang <daothitrang1982@gmail.com>
(*Ngày nhận bài: 02-7-2021; Ngày chấp nhận đăng: 7-10-2021*)

Tóm tắt. Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu một số kết quả về môđun bất biến đẳng cấu trên vành Goldie phải, đồng thời nêu một số tính chất liên quan đến lớp các môđun này. Ngoài ra, chúng tôi cũng khẳng định một số vấn đề liên quan đến lớp vành bất biến đẳng cấu không suy biến.

Từ khóa: Môđun nội xạ, môđun bất biến đẳng cấu, vành Goldie phải, môđun không suy biến, vành tổng quát hóa của chuỗi tổng quát

Automorphism invariant modules on the right Goldie ring

Le Van Thuyet[1], Dao Thi Trang[1,2*], Truong Cong Quynh[3]

[1] University of Education, Hue University, 34 Le Loi St., Hue, Vietnam
[2] Ho Chi Minh University of food industry, 140 Le Trong Tan St., HCMC, Vietnam
[3] The University of Danang - University of Science and Education, 45 Ton Duc Thang St., Da Nang, Vietnam

* Correspondence to Dao Thi Trang <daothitrang1982@gmail.com>
(*Received: 5 July 2021; Accepted: 7 September 2021*)

Abstract. In this paper, we study some properties of automorphism invariant modules on the right Goldie ring and state some properties related to this class of modules. In addition, we confirmed some problems related to the nonsingular automorphism invariant ring.

Keywords: automorphism invariant modules, right Goldie ring, nonsingular

1 Giới thiệu

Trong suốt bài báo này, vành R luôn giả thiết là vành kết hợp có phần tử đơn vị và mọi R-môđun được xét là môđun unita. Với vành R đã cho, ta viết M_R (tương ứng, ${}_RM$) để chỉ M là một R-môđun phải (tương ứng, trái). Khi không sợ nhầm lẫn về phía của môđun, để đơn giản ta viết môđun M thay vì M_R. Môđun con K của R-môđun M được gọi là *môđun con cốt yếu* trong M, ký hiệu $K \leq^e M$, nếu với mọi môđun con L của M mà $K \cap L = 0$ thì $L = 0$, ta cũng nói M là mở rộng cốt yếu của môđun con K. Nếu mọi môđun con của M là cốt yếu thì M được gọi là *môđun đều*. Một đơn cấu $f : K \to M$ được gọi là cốt yếu nếu $Im(f) \leq^e M$. Ký hiệu

$Z(M)=\{x\in M / r(x)\leq^{e} R\}$, một môđun M được gọi là *không suy biến* nếu $Z(M_R)=0$ và được gọi là suy biến nếu $Z(M_R)=M$. Môđun U được gọi là M-nội xạ nếu với mỗi môđun con K của M thì mọi đồng cấu $v:K\to U$ đều mở rộng được đến đồng cấu $\bar{v}:M\to U$. Nếu môđun M là M-nội xạ thì M được gọi là tựa nội xạ [1]. Johnson và Wong đã chứng minh rằng M là môđun tựa nội xạ nếu và chỉ nếu M bất biến qua tất cả các tự đồng cấu của bao nội xạ của nó. Một cách tự nhiên, trong [2], Lee và Zhou đã đưa ra khái niệm môđun bất biến đẳng cấu; môđun M được gọi là *bất biến đẳng cấu* nếu M bất biến qua tất cả các tự đẳng cấu của bao nội xạ của nó. Như vậy, môđun tựa nội xạ là môđun bất biến đẳng cấu. Trong [3], Dickson và Fuller đã khẳng định, nếu M là một đại số trên trường $\mathbb{F}$ nhiều hơn hai phần tử thì mọi $\mathbb{F}-$môđun phải M là bất biến đẳng cấu nếu và chỉ nếu M là tựa nội xạ. Môđun U được gọi là M-giả nội xạ nếu với mỗi môđun con K của M thì mọi đơn cấu $v:K\to U$ đều mở rộng được đến đồng cấu $\bar{v}:M\to U$. Môđun M được gọi là giả nội xạ nếu M là M-giả nội xạ [4]. Trong [5], Er, Singh và Srivastava đã khẳng định một môđun là giả nội xạ nếu và chỉ nếu nó là môđun bất biến đẳng cấu.

Vành Artin phải (trái) R được gọi là tổng quát hóa của chuỗi tổng quát nếu mỗi phần tử lũy đẳng nguyên thủy e của R thì eR (Re) có duy nhất chuỗi phân tích như là R-môđun phải (trái). Lớp các vành tổng quát hóa của chuỗi tổng quát được Eisenbud và Griffith nghiên cứu [6]. Một môđun M có sự phân tích chiều dài hữu hạn được gọi là chuỗi tổng quát nếu nó có duy nhất sự phân tích chuỗi. Nó được nghiên cứu nhiều trên vành nguyên tố Noether trái di truyền trái R và cũng là Noether phải, di truyền phải và được gọi là vành nguyên tố Noether di truyền. Năm 1968, Fuller đã nghiên cứu môđun không phân tích được trên vành tổng quát hóa của chuỗi tổng quát, ông đã chứng minh được vành R là tổng quát hóa của chuỗi tổng quát nếu và chỉ nếu mỗi môđun không phân tích được là tựa nội xạ. Trong bài báo này, chúng tôi cũng đưa ra một số kết quả về môđun bất biến đẳng cấu trên vành tổng quát hóa của chuỗi tổng quát và vành nguyên tố Noether di truyền.

2 Môđun bất biến đẳng cấu trên vành Goldie nguyên tố

Bổ đề 2.1. *Nếu M là môđun bất biến đẳng cấu, A là môđun con đóng của M và B là môđun con của M thỏa $A\cap B=0$, thì A là B-nội xạ. Hơn nữa, bất kỳ đơn cấu $h:A\to M$ với $A\cap h(A)=0$ thì $h(A)$ là một môđun con đóng của M.*

Chứng minh. Giả sử M là môđun bất biến đẳng cấu. Gọi C là phần bù của A trong M chứa B. Nói riêng, $C\oplus A\leq^{e} M$. Gọi $f:H\to A$ là một đồng cấu, với H là môđun con của C. Tồn tại một đồng cấu $g:E(C)\to E(A)$ và tự đồng cấu lũy linh ϕ của $E(M)$ sao cho $\phi(M)\leq M$, $\phi|_C=g|_C$ và $\phi|_H=f$. Bây giờ $g(C)=\phi(C)\leq M\cap E(A)=A$, kéo theo A là C-nội xạ hay A là B-nội xạ.

Giả sử $h:A\to M$ là một đồng cấu thỏa $A\cap h(A)=0$. Gọi K là môđun con đóng của $h(A)$ trong M. Lúc đó $A\cap K=0$. Theo chứng minh trên, A là K-nội xạ và do đó tồn tại $k:K\to A$ sao cho k là một mở rộng của $h^{-1}:h(A)\to A$. Với mọi $a\in A$, ta có $a=(h^{-1}\circ h)(a)=(k\circ h)(a)$ và rõ ràng $h:A\to K$ là một đơn cấu chẻ ra. Như vậy, $h(A)=K$ là môđun con đóng của M. ▪

Nhắc lại rằng, vành R được gọi là *Goldie phải* nếu R không chứa tổng trực tiếp vô hạn các iđêan phải khác không của R và R thỏa mãn điều kiện ACC các linh hóa tử phải. Vành R được gọi là *nguyên tố* nếu tích của hai iđêan khác không bất kỳ của R là khác không.

pISSN 1859-1388
eISSN 2615-9678

Bổ đề 2.2. *Cho R là vành Goldie phải nguyên tố và M là R -môđun không suy biến khác không. Nếu N là M -nội xạ thì N là R -môđun nội xạ.*

Chứng minh. Theo chứng minh Hệ quả 7.26(a) trong [7]. ▪

Bổ đề 2.3. *Cho M là môđun bất biến đẳng cấu không suy biến trên vành Goldie phải nguyên tố R. Khi đó:*

(1) Nếu N là môđun con đóng thực sự của M thì N là R -môđun nội xạ.

(2) Nếu M là R -môđun phải không đều thì M là môđun nội xạ.

Chứng minh. (1) Gọi N là môđun con đóng thực sự của R -môđun không suy biến M. Khi đó, tồn tại môđun con N' của M sao cho $N \cap N' = 0$. Kết hợp với Bổ đề 2.1 và Bổ đề 2.2, N là R -môđun phải nội xạ.

(2) Giả sử M là R -môđun không suy biến không đều. Khi đó, M là mở rộng cốt yếu của $M_1 \oplus M_2$ với M_1 và M_2 là các môđun con đóng không suy biến khác không của M. Từ (1) suy ra $M_1 \oplus M_2$ là R -môđun phải nội xạ; do đó, $M = M_1 \oplus M_2$ là nội xạ.

Một môđun khác không M không chứa tổng trực tiếp vô hạn các môđun con khác không nếu và chỉ nếu M chứa một môđun con cốt yếu có dạng $U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_n$ với U_i là các môđun con đều nào đó của M. Hơn nữa, số nguyên n là bất biến và n được gọi là *chiều đều hoặc chiều Goldie (Goldie rank)* của M và được ký hiệu là $\dim M = n$. Nếu $M = 0$ thì ta viết $\dim(M) = 0$.

Định lý 2.4. *Cho R là vành Goldie phải nguyên tố và M là R -môđun phải thỏa mãn $\dim(M / Z(M)) > 1$. Các điều kiện sau là tương đương:*

(1) M là môđun bất biến đẳng cấu.

(2) M là môđun nội xạ.

Chứng minh. $(1) \Rightarrow (2)$ Giả sử R là vành Goldie phải nguyên tố và M là R-môđun phải bất biến đẳng cấu với $\dim(M / Z(M)) > 1$. Chú ý rằng môđun con suy biến của R-môđun trên vành Goldie phải nửa nguyên tố bất kỳ là môđun con đóng; do đó, $Z(M)$ là môđun con đóng thực sự của M. Khi đó, tồn tại một môđun con $K \neq 0$ của M sao cho $Z(M) \cap K = 0$. Ta kiểm tra được K là môđun con không suy biến. Theo Bổ đề 2.1, $Z(M)$ là K -nội xạ. Suy ra, $Z(M)$ là môđun nội xạ theo Bổ đề 2.2 và do đó, tồn tại sự phân tích $M = Z(M) \oplus M'$ với M' là R -môđun phải không suy biến. Khi đó, $\dim(M') > 1$ và rõ ràng M' không là R -môđun phải đều. Chú ý rằng M' là mô đun bất biến đẳng cấu. Theo Bổ đề 2.3(8), M' là nội xạ. Do đó, M là R -môđun phải nội xạ.

$(2) \Rightarrow (1)$ là rõ ràng. ▪

Mệnh đề 2.5. *Mỗi môđun bất biến đẳng cấu trên vành tổng quát hóa của chuỗi tổng quát là tựa nội xạ.*

Chứng minh. Cho M là R - môđun bất biến đẳng cấu trên vành tổng quát hóa của chuỗi tổng quát. Khi đó, $M = \oplus_{i \in I} M_i$, với mọi R -môđun phải M_i là chuỗi tổng quát. Chú ý rằng mỗi R -môđun phải không phân tích được M_i là tựa nội xạ theo [8, Định lý 5.3]. Mặt khác, mỗi hạng tử trực tiếp của môđun bất biến đẳng cấu là môđun bất biến đẳng cấu và M_i, M_j là nội xạ tương hỗ nếu $M_i \oplus M_j$ là môđun bất biến đẳng cấu. Sử dụng [9, Định lý 1.7], ta kết luận M là tựa nội xạ. ▪

Vành R được gọi là *di truyền* phải nếu mọi iđêan phải của R là xạ ảnh. Vành R được gọi là *bị chặn* nếu mọi iđêan phải hoặc trái cốt yếu của R chứa một iđêan khác không.

Cho M là môđun phải trên vành R và gọi $t(M)$ là tập tất cả các phần tử của M được linh hóa bởi ước khác không nào đó của vành R. Môđun M được gọi là *không phải là xoắn (tương ứng, xoắn, không xoắn)* nếu $t(M) \neq M$ (tương ứng, $t(M) = M, t(M) = 0$). Chú ý rằng $t(M) = Z(M)$ với môđun phải M bất kỳ trên vành Goldie nguyên tố. Một môđun con K của M được gọi là *bất biến đầy đủ* môđun con nếu $f(K)$ được chứa trong K với mọi tự đồng cấu f của M.

Định lý 2.6. *Cho R là một vành nguyên tố Noether di truyền bị chặn phải. Khi đó các điều kiện sau là tương đương đối với R -môđun phải xoắn M :*

(1) M là bất biến tự đẳng cấu.

(2) M là tựa nội xạ.

Chứng minh. $(2) \Rightarrow (1)$ là hiển nhiên.

$(1) \Rightarrow (2)$ Cho M là một R - môđun phải bất biến đẳng cấu. N là một môđun con của M và $\alpha : N \to M$ là một đồng cấu. Ta sẽ chỉ ra α có thể mở rộng đến một tự đồng cấu của M. Gọi $\mathcal{F}$ là tập các cặp (N', α') sao cho $N \le N' \le M$ và $\alpha' : N' \to M$ là một mở rộng của α. Theo Bổ đề Zorn, gọi (N_0, α_0) là cặp tối đại trong $\mathcal{F}$. Chúng ta sẽ chỉ ra mâu thuẫn đó là $N_0 = M$. Giả sử tồn tại $x \in M$ và $x \notin N_0$. Vì M là môđun xoắn nên linh hóa tử phải của x trong R là một iđêan phải cốt yếu của R; do đó, nó chứa một iđêan hai phía I khác không của R. Theo [10, Định lý 3.3] và [11, Định lý 3.3], R / I là vành tổng quát hóa của chuỗi tổng quát. Đặt $K = \{m \in M : mI = 0\}$ là môđun con của R -môđun phải M chứa x. Vì K là môđun con bất biến đầy đủ của M nên K cũng là môđun bất biến đẳng cấu. Suy ra, K là môđun phải bất biến đẳng cấu trên vành tổng quát hóa của chuỗi tổng quát R / I; do đó, K là R / I - môđun phải tựa nội xạ theo Mệnh đề 2.5. Suy ra, K là R -môđun phải tựa nội xạ. Xét ánh xạ $\beta : K \cap N_0 \to K$ được xác định bởi $k \mapsto \alpha_0(k)$ với mọi $k \in K \cap N_0$. Đây là đồng cấu được định nghĩa tốt. Vì K là tựa nội xạ tồn tại đồng cấu $\bar{\beta} : K \to K$ là mở rộng của β. Xét ánh xạ $\gamma : K + N_0 \to M$ được xác định bởi $\gamma(k + m) = \bar{\beta}(k) + \alpha_0(m)$ với mọi $k \in K$ và $m \in N_0$. Khi đó, γ là đồng cấu được định nghĩa tốt và là mở rộng thực sự của α'. Điều này mâu thuẫn với tính tối đại của (N_0, α_0). Do đó, M là tựa nội xạ. ▪

Định lý 2.7. *Cho R là vành nguyên tố Noether di truyền bị chặn phải và M là R -môđun phải với* $\dim(M / Z(M)) \ne 1$. *Các điều kiện sau là tương đương:*

(1) M là môđun bất biến đẳng cấu.

(2) M là tựa nội xạ.

(3) M là môđun xoắn tựa nội xạ hoặc M là R -môđun phải nội xạ với $\dim(M / Z(M)) > 1$.

Chứng minh. $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$ là rõ ràng.

$(1) \Rightarrow (3)$ Nếu $\dim(M / Z(M)) = 0$ thì $M = Z(M)$ hoặc M là môđun xoắn. Suy ra, M là tựa nội xạ theo Định lý 2.6. Mặt khác, theo Định lý 2.4, M là môđun tựa nội xạ nếu $\dim(M / Z(M)) > 1$. ▪

Nhắc lại rằng, vành R được gọi là *vành không suy biến* nếu $Z(R_R) = 0$ và được gọi là *suy biến* nếu $Z(R_R) = R$. Vành R được gọi là *bất biến đẳng cấu* nếu R_R là R -môđun bất biến đẳng cấu. Tập các phần tử lũy đẳng là trù mật phải của vành R nếu nó sinh ra một iđêan phải cốt yếu trong vành R. Trong phần tiếp theo của bài báo, chúng tôi chứng minh một số kết quả về vành bất biến đẳng cấu không suy biến.

Định nghĩa 2.8. [12] Vành R được gọi là $fa-$vành phải nếu mọi iđêan phải hữu hạn sinh của vành R là bất biến đẳng cấu.

Bổ đề 2.9. *Cho R là vành nửa nguyên thủy hoặc không suy biến phải. Khi đó, R bất biến đẳng cấu phải khi và chỉ khi R là $fa-$vành phải.*

Chứng minh. Điều kiện đủ là hiển nhiên. Bây giờ, chúng ta giả sử R bất biến đẳng cấu phải. Khi đó, $R / J(R)$ là một vành chính quy von Neumann và $J(R) = Z(R_R)$. Theo giả thiết, chúng ta suy ra R là một vành chính quy von Neumann. Điều này suy ra mọi iđêan phải hữu hạn sinh của R là một

pISSN 1859-1388
eISSN 2615-9678

hạng tử trực tiếp. Chúng ta kết luận tất cả các iđêan phải hữu hạn sinh của R là bất biến đẳng cấu. Vậy, R là $fa-$vành phải. ▪

Định lý 2.10. *Cho R là vành bất biến đẳng cấu phải và không suy biến phải hoặc nửa nguyên thủy. Khi đó, R là tổng trực tiếp của vành tựa nội xạ phải chính quy von Neumann chính phương đầy đủ và vành không chính phương phải.*

Chứng minh. Theo [12, Theorem 12], R đẳng cấu với vành ma trận $\begin{pmatrix} S & 0 \\ M & T \end{pmatrix}$, với S là vành tự nội xạ phải chính quy von Neumann chính phương đầy đủ ; T là vành không chính phương phải và M là một iđêan lũy linh của R. Vì R là không suy biến phải hoặc nửa nguyên thủy nên $M=0$. Từ đó, suy ra đẳng cấu vành $R \cong S \oplus T$. ▪

Mệnh đề 2.11. *Cho R là vành bất biến đẳng cấu phải, không suy biến phải và không phân tích được với các phần tử lũy đẳng nguyên thủy. Khi đó, $soc(R_R) \neq 0$. Hơn nữa, ảnh đồng cấu giữa hai iđêan chính I và K không phân tích được với $I \cap K = 0$ là đơn.*

Chứng minh. Cho R là vành bất biến đẳng cấu phải, không suy biến phải và không phân tích được với $e \in R$ là phần tử lũy đẳng nguyên thủy. Khi đó, $eR(1-e) \neq 0$ hoặc $(1-e)Re \neq 0$. Vì R là vành bất biến đẳng cấu phải, không suy biến phải nên theo Bổ đề 2.9, $R = R_1 \oplus R_2$ với R_1 là vành tự nội xạ phải chính quy von Neumann chính phương đầy đủ và R_2 là vành không chính phương phải. Mặt khác, R không phân tích được nên $R = R_1$ hoặc $R = R_2$.

Giả sử $R = R_2$. Khi đó, R là vành không chính phương phải. Tiếp theo, chúng ta giả sử $eR(1-e) \neq 0$. Xét đồng cấu khác không $\varphi: (1-e)R \to eR$. Nếu $Ker(\varphi) \nleq^e (1-e)R$ thì tồn tại môđun con $A \neq 0$ của $(1-e)R$ sao cho $Ker(\varphi) \cap A = 0$. Suy ra, $\phi|_A: A \to \varphi(A) \leq eR$ là đẳng cấu (vô lý). Nếu $Ker(\varphi) \leq^e (1-e)R$ thì $(1-e)R/Ker(\varphi) \cong Im(\varphi)$ là môđun con suy biến nên $Im(\varphi) = Z(Im(\varphi)) = 0$ (mâu thuẫn). Hoàn toàn tương tự cho trường hợp $(1-e)Re \neq 0$, chúng ta cũng suy ra điều mâu thuẫn.

Tóm lại, chúng ta phải có $R = R_1$ là vành tựa nội xạ phải chính quy von Neumann chính phương đầy đủ. Vì R là vành không phân tích được nên theo [13, Mệnh đề 9.6], ta có R là một vành nguyên tố. Từ đó suy ra $eR(1-e) \neq 0$.

Giả sử $a \in eR(1-e)$ là phần tử khác không bất kỳ. Vì eR là nội xạ không phân tích được nên $aR \leq^e eR$. Chúng ta chú ý aR cũng là môđun nội xạ và vì vậy $aR = eR$. Điều này chứng tỏ $eR(1-e) \subseteq aR$. Từ điều này, chúng ta kiểm tra được aR là một iđêan phải đơn của R.

Hơn nữa, nếu I và K là hai iđêan chính không phân tích được của R với $I \cap K = 0$ thì ảnh đồng cấu khác không từ I vào K là đơn. ▪

Từ [13, Định lý 9.12], chúng ta thu được kết quả quan trọng sau :

Hệ quả 2.12. *Nếu R là vành bất biến đẳng cấu phải, không suy biến phải và không phân tích được với các phần tử lũy đẳng nguyên thủy thì R đẳng cấu vành các phép biến đổi tuyến tính của một không gian véctơ trên một thể.*

Hệ quả 2.13. *Cho R là vành bất biến đẳng cấu phải, không suy biến phải và không phân tích được với tập trù mật lũy đẳng nguyên thủy. Khi đó R có đế cốt yếu.*

Chứng minh. Theo Hệ quả 2.12 và [13, Định lý 9.13].

Thông tin tài trợ

Công trình này được hỗ trợ / hỗ trợ một phần từ Chương trình Nghiên cứu mạnh của Đại học Huế, mã số NCM.DHH.2020.15. Tác giả Đào Thị Trang được bảo trợ và cấp kinh phí theo hợp đồng số 11/HĐ-DCT ngày 20 tháng 1 năm 2021 do

Trường Đại học Công nghiệp Thực phẩm Tp. HCM.

Tài liệu tham khảo

1. Johnson RE, Wong ET. Quasi-injective modules and irreducible rings. J Lond Math Soc. 1961;(36):260-268.
2. Lee TK, Zhou Y. Modules which are invariant under automorphisms of their injective hulls. J Algebra Appl. 2013;12(2).
3. Lam TY. Lectures on Modules and Rings. Berlin: Springer. 1998.
4. Jain SK, Singh S. Quasi injective and pseudo injective modules. Canadian Mathematical Bulletin. 1975;18(3):359-366.
5. Noyan Er, Singh S, Srivastava AK. Rings and modules which are stable under automorphisms of their injective hulls. J Algebra 379. 2013:223-229.
6. Eisenbud D, Griffith P. Serial rings. Journal of Algebra. 1971;17(3):389-400.
7. Goodearl KR, Warfield JRB. An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press; 2004.
8. Fuller KR. On indecomposable injectives over artinian rings. Pacific J Math. 1969;29(1):115-135.
9. Mohamed SH, Muller BJ. Continuous and Discrete Modules. Cambridge: Cambridge University Press; 1990.
10. Lenagan TH. Bounded hereditary noetherian prime rings. J London Math Soc 6. 1973;S2-6(2):241-246.
11. Eisenbud D, Robson JC. Hereditary Noetherian prime rings. Journal of Algebra. 1970;16(1):86-104.
12. Quynh TC, Abyzov AN, Trang DT. Rings all of whose finitely generated ideals are automorphism-invariant. Journal of Algebra and Its Applications. 2021:2250159.
13. Goodearl KR. Von Neumann Regular Rings. Krieger Florida: Publishing Company; 1991.