Tạp chí Khoa học Đại học Huế: Khoa học Tự nhiên
Tập 131, Số 1C, 47–53, 2022

pISSN 1859-1388
eISSN 2615-9678

ĐỊNH LÝ CƠ BẢN CHO CÁC ĐỐI ĐẠI SỐ TRÊN VÀNH DEDEKIND VÀ ÁP DỤNG

Nguyễn Đại Dương*

Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng, 459 Tôn Đức Thắng, Liên Chiểu, Đà Nẵng, Việt Nam

* Tác giả liên hệ Nguyễn Đại Dương <nguyendaiduongqn@yahoo.com.vn>
(*Ngày nhận bài: 18-08-2021; Ngày chấp nhận đăng: 18-02-2022*)

Tóm tắt. Bài báo này nghiên cứu tính hữu hạn địa phương của các đối đại số được biết đến như là định lý cơ bản cho các đối đại số trên vành Dedekind. Trước tiên, chúng tôi đưa ra một chứng minh của tính chất này cho các đối đại số xạ ảnh như các môđun trên một miền iđêan chính mà không sử dụng định lý cơ bản cho các đối đại số trên một trường. Tiếp theo, chúng tôi đưa ra một phiên bản của định lý cho các đối đại số phẳng trên vành Dedekind, dĩ nhiên là mở rộng của định lý trên một trường. Cuối cùng, chúng tôi áp dụng các kết quả này cho vành tọa độ của các lược đồ nhóm affine phẳng.

Từ khóa: đối đại số, định lý cơ bản cho các đối đại số, lược đồ nhóm affine phẳng, vành Dedekind

The fundamental theorem for coalgebras over the Dedekind ring and application

Nguyen Dai Duong *

Faculty of Mathematics, University of Science and Education, The University of Da Nang, 459 Ton Duc Thang St., Lien Chieu District, Da Nang, Vietnam

* Correspondence to Nguyen Dai Duong <nguyendaiduongqn@yahoo.com.vn>
(*Received: 18 August 2021; Accepted: 18 February 2022*)

Abstract. In this paper, we study the local finiteness of coalgebras, known as the fundamental theorem for coalgebras over the Dedekind ring. First, we give proof of this property for coalgebras which are projective as modules over a principal ideal domain, without using the fundamental theorem for coalgebras over a field. Next, we give a version of the theorem for flat coalgebras over the Dedekind ring that extends the certainty of the theorem over a field. Finally, we apply these results to the coordinate ring of flat affine group schemes.

Keywords: coalgebra, the fundamental theorem for coalgebras, flat affine group schemes, Dedekind ring

1 Mở đầu

Đối đại số và đại số trên một trường số có quan hệ rất chặt chẽ với nhau. Về mặt khái niệm, đối đại số có thể hiểu như là đối ngẫu của đại số. Tuy nhiên, đối đại số có những tính chất riêng mà đại số không có. Một trong những điểm khác biệt chính của đối đại số so với đại số là tính hữu hạn địa phương hay còn gọi là định lý cơ bản cho đối đại số. Định lý cơ bản của đối đại số trên một trường phát biểu rằng:

"Cho C là một đối đại số trên một trường. Khi đó, với mỗi phần tử $c \in C$ luôn tồn tại một đối đại số con D hữu hạn chiều của C chứa c".

Có nhiều chứng minh khác nhau cho định lý này trong một số công trình của một số tác giả, chẳng hạn [1, Theorem 1.4.7], [2, Section 1], [3, Section 2.2]. Khái niệm đối đại số có thể mở rộng trên một vành giao hoán R thay vì một trường [4, Section 3.1]. Do đó, một bài toán quan trọng đặt ra là liệu định lý có đúng với một đối đại số bất kỳ trên vành hay ít nhất liệu có tồn tại các đối đại số thỏa mãn tính chất sau: *"Một đối đại số C trên vành R được gọi là thỏa mãn định lý cơ bản của đối đại số trên một vành R nếu: với mỗi phần tử $c \in C$ đều tồn tại một đối đại số con D hữu hạn sinh như R-môđun chứa c sao cho thương C/D là R-môđun phẳng".*

Tính chất này không nhất thiết đúng đối với các đối đại số trên một vành giao hoán có đơn vị [2, Section 5.3], [5, Section 8]. Tuy nhiên, trong [4], Hazewinkel đã phát triển định lý cơ bản cho đối đại số trên vành gọi là tính chất định lý chính. Tác giả đã đưa ra một lớp đối đại số trên vành thỏa mãn tính chất định lý chính [2, Theorem 8.10] và kết quả này được áp dụng để đưa ra một chứng minh mới của định lý cơ bản cho đối đại số trên một trường [2, Corollary 8.12]. Một kết quả quan trọng khác của Hazewinkel là mỗi đối đại số mà tự do như một môđun trên miền iđêan chính đều thỏa mãn tính chất đã nêu [5, Theorem 8.4]. Vì mỗi một miền iđêan chính đều là vành Dedekind nên một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là có thể mở rộng định lý cho các đối đại số trên một miền Dedekind hay không. Để trả lời cho câu hỏi này, Duong và Hai trong [6, Section 3.1] đã nghiên cứu một lớp các đối đại số phẳng trên vành Dedekind với tên gọi là đối đại số *hữu hạn địa phương đặc biệt*. Với khái niệm này, các đối đại số sẽ thỏa mãn định lý cơ bản và một trong những lớp đối đại số như vậy là lớp các đối đại số xạ ảnh như một môđun trên vành Dedekind [6, Proposition 3.1.5 (ii)]. Áp dụng kết quả này, các tác giả đã chứng minh vành tọa độ của một lược đồ nhóm phẳng kiểu hữu hạn với các thớ liên thông đều là *hữu hạn địa phương đặc biệt* như một đối đại số [6, Proposition 3.1.7] và do đó xạ ảnh như một môđun [6, Proposition 3.1.5].

Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra một chứng minh khác của định lý cơ bản cho các đối đại số xạ ảnh (do đó tự do) trên một miền iđêan chính phát triển chứng minh định lý cơ bản trên trường [1, Theorem 1.4.7]. Đây là nội dung của Mệnh đề 2.3 trong bài báo này. Chúng tôi cũng phát biểu định lý cơ bản cho các đối đại số phẳng trên một vành Dedekind dưới dạng khác, Định lý 2.5. Cuối cùng, chúng tôi đưa ra Mệnh đề 3.3 như một áp dụng cho các lược đồ nhóm phẳng kiểu hữu hạn với thớ tổng quát liên thông.

Trong suốt bài báo này, R luôn là một vành Dedekind. Để đưa ra các kết quả, trước hết chúng ta cần một số khái niệm cho các đối đại số trên R.

Định nghĩa 1.1 *Cho C là một R-môđun. Một cấu trúc đối đại số trên C bao gồm hai ánh xạ R - tuyến tính $\Delta: C \to C \otimes C$ và $\epsilon: C \to R$ thỏa mãn hai điều kiện sau:*

(i). $(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta;$

(ii). $(\epsilon \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \epsilon) \circ \Delta = id$

hay các sơ đồ sau là giao hoán

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta\otimes id"] \\ C \otimes C \arrow[r, "id\otimes\Delta"'] & C \otimes C \otimes C; \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, "\cong"] & \\ R \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\epsilon\otimes id"] \arrow[r, "id\otimes\epsilon"'] & C \otimes R \end{tikzcd}$$

với id là ký hiệu của ánh xạ đồng nhất.

Ánh xạ Δ được gọi là ánh xạ đối tích; ϵ được gọi là ánh xạ đối đơn vị. Một đối đại số được gọi là phẳng nếu nó phẳng như một R-môđun

pISSN 1859-1388
eISSN 2615-9678

(một R -môđun còn được gọi là một môđun trên R).

Ví dụ 1.2

(i). Vành đa thức một biến $R[X]$ là một đối đại số xác định bởi đối tích $\Delta: R[X] \to R[X] \otimes R[X]$, $\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$; đối đơn vị $\epsilon: R[X] \to R$ là ánh xạ không.

(ii). Vành đa thức Laurent $R[X, X^{-1}]$ là một đối đại số với đối tích và đối đơn vị lần lượt được xác định như sau: $\Delta(X) = X \otimes X$, $\epsilon(X) = 1$.

Định nghĩa 1.3 *Cho C là một đối đại số trên R .*

(i). Một R -môđun con D của C được gọi là đối đại số con của C nếu $\Delta(D) \subset D \otimes D$

(ii). Một đối đại số con D của C được gọi là đặc biệt nếu C/D là R -môđun phẳng.

(iii). Đối đại số C phẳng trên R được gọi là đối đại số *hữu hạn địa phương đặc biệt* nếu với mọi tập con S *hữu hạn* của C đều có một đối môđun con đặc biệt hữu hạn sinh như R -môđun chứa S.

Từ định nghĩa trên, có thể thấy mỗi đối đại số *hữu hạn địa phương đặc biệt* đều thỏa mãn định lý cơ bản cho các đối đại số. Tuy nhiên, vẫn tồn tại các đối đại số không *hữu hạn địa phương đặc biệt* [6, Example 3.1.3].

2 Định lý cơ bản cho các đối đại số phẳng

Với giả thiết R là vành Dedekind, ta luôn ký hiệu K là trường phân thức của nó.

Trước khi đi vào kết quả chính trong mục này, ta cần hai bổ đề sau.

Bổ đề 2.1 *([6, Lemma 3.1.4]) Cho $D \subset C$ là các R -môđun phẳng và M, N là các R -môđun tùy ý. Khi đó:*

(i). $M \otimes C \cap N \otimes C = (M \cap N) \otimes C$;

(ii). Nếu N là một R -môđun con của M và môđun thương C/D là phẳng thì

$N \otimes C \cap M \otimes D = N \otimes D$ như các môđun con trong $M \otimes D$.

Bổ đề 2.2 *Cho M là một R -môđun phẳng và N là một R -môđun con của M . Đặt $N^s := (N \otimes_R K) \cap M$. Khi đó,*

(i). $N^s = \{m \in M : \exists r \neq 0, rm \in N\}$ là một R -môđun của M chứa N

(ii). $N^s \otimes_R K = N \otimes_R K$. Hơn nữa M/N^s phẳng trên R .

(iii). $M \otimes N \subset M \otimes N^s \subset M \otimes M$;

(iv). $(M \otimes N)^s \cong M \otimes N^s \subset M \otimes N$,

$(N \otimes M)^s \cong N^s \otimes M \subset N \otimes M$;

(v). $M \otimes N^s \cap N^s \otimes M \cong N^s \otimes N^s \subset M \otimes M$.

Chứng minh. Chứng minh (i) được suy ra từ định nghĩa. Khẳng định (ii) là từ bổ đề trên do tính phẳng của K trên R :

$N^s \otimes_R K = [(N \otimes_R K) \cap M] \otimes K = N \otimes_R K$

và chú ý rằng M/N^s không có xoắn trên R do đó phẳng vì R là vành Dedekind. Vì M là R -môđun phẳng nên bằng cách lấy tích ten xơ với đơn ánh $N \rightarrowtail N^s$ ta chứng minh được (iii) . Để chứng minh (iv) chỉ cần nhận xét rằng:

$$(M \otimes N^s) \otimes K = (M \otimes K) \otimes (N^s \otimes K)$$
$$= (M \otimes K) \otimes (N \otimes K) = (M \otimes N) \otimes K.$$

Tương tự, $(N^s \otimes M) \otimes K = (N \otimes M) \otimes K$. Cuối cùng (v) được suy ra từ bổ đề trên.

Mệnh đề sau đây đưa ra một chứng minh trực tiếp mở rộng phương pháp chứng minh của định lý cơ bản cho đối đại số trên một trường [1, Theorem 1.4.7] cho đối đại số xạ ảnh trên miền iđêan chính. Nói cách khác, lớp đối đại số này là *hữu hạn địa phương đặc biệt* và do đó thỏa mãn định lý cơ bản. Đây cũng là kết quả đề cập trong [5, Theorem 8.4].

Mệnh đề 2.3 *Cho* R *là một miền iđêan chính và* C *là đối đại số trên* R *và xạ ảnh như một môđun trên* R*. Khi đó với mỗi phần tử* $c \in C$ *đều tồn tại một đối đại số con phẳng đặc biệt của* C *chứa* c *và hữu hạn sinh như một* R*-môđun.*

Chứng minh. Với mỗi phần tử $c \in C$, ta có thể viết

$$\Delta(c) = \sum_i d_i \otimes e_i \in C \otimes C.$$

Từ điều kiện đầu trong Định nghĩa 1.1 ta có

$$(\Delta \otimes id)\Delta(c) = \sum_i \Delta(d_i) \otimes e_i$$
$$= \sum_{i,j} c_j \otimes d_{ij} \otimes e_i \in C \otimes C \otimes C,$$

trong đó $c_i, d_{i,j}, e_i \in C$ và các chỉ số i, j lần lượt đều thuộc các tập hữu hạn I, J. Vì C xạ ảnh trên miền iđêan chính R nên tự do như R-môđun nên môđun con sinh bởi hệ $\{c_i, d_{i,j}, e_i\}_{i\in I, j\in J}$ trong C là một môđun con tự do và cũng hữu hạn sinh. Do đó, tương tự như trong chứng minh của kết quả trên một trường, ta có thể giả sử hệ $\{c_i, d_{i,j}, e_i\}_{i\in I, j\in J}$ là độc lập tuyến tính.

Xét R-môđun D con của môđun con ở trên sinh bởi tất cả $d_{i,j}$ ($i \in I, j \in J$). Khi đó, từ điều kiện thứ hai của Định nghĩa 1.1, ta có đồng nhất

$$c = \sum_{i,j} \varepsilon(c_j)\varepsilon(e_i)d_{ij} \in D \subset D^s,$$

ở đây D^s được định nghĩa như trong Bổ đề 2.2. Vậy, cả hai $R-$ môđun D và D^s đều là các môđun tự do chứa $c \in C$. Hơn nữa, theo Bổ đề 2.2, $\dim_K(D^s \otimes K) = \dim_K(D \otimes K) < +\infty$ nên D^s hữu hạn sinh trên R [5, Lemma 3.17]. Điều còn lại chỉ cần chứng minh D^s là đối đại số con của C.

Từ điều kiện thứ hai trong Định nghĩa 1.1, ta có đẳng thức sau:

$$\sum_{i,j} \Delta(c_j) \otimes d_{ij} \otimes e_i = \sum_{i,j} c_j \otimes \Delta(d_{ij}) \otimes e_i.$$

Tính độc lập tuyến tính của hệ $\{e_i\}_{i\in I}$ suy ra $\sum_j \Delta(c_j) \otimes d_{ij} = \sum_j c_j \otimes \Delta(d_{ij}) \in C \otimes C \otimes C$. Điều này dẫn đến $\sum_j c_j \otimes \Delta(d_{ij}) \in C \otimes C \otimes D$ do $\sum_j \Delta(c_j) \otimes d_{ij} \in C \otimes C \otimes D$. Lại do $\{c_j\}_{j\in J}$ là hệ độc lập tuyến tính nên ta cũng có $\Delta(d_{ij}) \in C \otimes D$. Lập luận tương tự ta cũng thu được $\Delta(d_{ij}) \in D \otimes C$. Bây giờ với mọi $d \in D^s$ luôn tồn tại $r \neq 0$ sao cho $rd \in D$, vậy ta có thể viết $rd = \sum_{i,j} \alpha_{ij} d_{i,j}$, $\alpha_{ij} \in R$. Khi đó

$$r\Delta(d) = \Delta(rd) = \sum_{i,j} r\alpha_{ij}\Delta(d_{i,j}) \in C \otimes D.$$

Từ Bổ đề 2.2, ta nhận được

$$\Delta(d) \in (C \otimes D)^s = C \otimes D^s$$

Hoàn toàn tương tự

$$\Delta(d) \in (D \otimes C)^s = D^s \otimes C.$$

Do đó, cũng từ Bổ đề 2.2, ta có $\Delta(d) \in C \otimes D^s \cap D^s \otimes C = D^s \otimes D^s$ hay $\Delta(D^s) \subset D^s \otimes D^s$. Vậy, đến đây ta có thể kết luận D^s là một đối đại số con của C.

Trước khi đi vào định lý chính của mục này, chúng ta cần bổ đề dưới đây.

Bổ đề 2.4 *Cho* $D \subset C$ *là các* R*-môđun phẳng. Đặt* $C_K := C \otimes K, D_K := D \otimes K$*. Khi đó:*

(i). $$[(C/D \otimes C) \oplus (C \otimes C/D)] \otimes_R K = (C_K/D_K \otimes C_K) \oplus (C_K \otimes C_K/D_K),$$

(ii). Giả sử môđun thương C/D cũng là phẳng. Nếu gọi $\Pi: C \to C/D$ là ánh xạ thương thì hạch của ánh xạ

$$C \otimes C \xrightarrow{(id\otimes\Pi)\oplus(\Pi\otimes id)} (C/D \otimes C) \oplus (C \otimes C/D)$$

là $D \otimes D$.

Chứng minh. Xét dãy khớp

 pISSN 1859-1388
eISSN 2615-9678

$$0 \longrightarrow D \longrightarrow C \xrightarrow{\Pi} C/D \longrightarrow 0 \ (*).$$

Lấy tích ten xơ (*) với K trên R ta nhận được dãy khớp sau:

$$0 \to D_K \to C_K \overset{\Pi\otimes_R K}{\to} (C/D)\otimes_R K \to 0$$

do tính phẳng của K trên R. Hệ quả là $C_K / D_K = (C/D)\otimes_R K$ và do đó

$$\begin{aligned}&[(C/D\otimes C)\oplus(C\otimes C/D)]\otimes_R K = \\ &[(C/D\otimes C)\otimes_R K]\oplus[C\otimes C/D)\otimes_R K] = \\ &[(C/D\otimes_R K)\otimes_R (C\otimes_R K)]\oplus \\ &[(C\otimes_R K)\otimes(C/D\otimes_R K)] = \\ &(C_K/D_K\otimes C_K)\oplus(C_K\otimes C_K/D_K).\end{aligned}$$

Để chứng minh khẳng định thứ hai của bổ đề, ta lấy tích ten xơ hai phía của dãy khớp (*) với R-môđun phẳng C ta nhận được hai dãy khớp sau:

$$0 \to C\otimes D \to C\otimes C \overset{id\otimes\Pi}{\to} C\otimes C/D \to 0$$

$$0 \to D\otimes C \to C\otimes C \overset{\Pi\otimes id}{\to} C/D\otimes C \to 0$$

Khi đó, ta dễ dàng nhận được

$$Ker(id\otimes\Pi)\oplus(\Pi\otimes id) = C\otimes D \cap D\otimes C = D\otimes D$$

theo Bổ đề 2.1. Một môđun M phẳng trên R được gọi là có hạng hữu hạn nếu $\dim_K(M\otimes K)$ là không gian vec tơ hữu hạn chiều. Với khái niệm này, ta có định lý tiếp theo có thể coi là một mở rộng của định lý cơ bản của đối đại số trên một trường. Vì khi R là một trường nên phát biểu của định lý là như nhau. Định lý cơ bản cho đối đại đại số trên vành Dedekind có thể phát biểu dưới dạng như sau.

Định lý 2.5 *Cho R là vành Dedekind và C là đối đại số phẳng trên R. Khi đó, với mỗi phần tử $c\in C$ đều tồn tại một đối đại số con phẳng đặc biệt có hạng hữu hạn chứa c.*

Chứng minh. Cho c là một phần tử trong $C \subset C_K = C\otimes K$. Khi đó, tồn tại một đối đại số hữu hạn chiều D_K của C_K chứa c theo định lý cơ bản của đối đại số trên một trường. Đặt $D = D_K \cap C$. Khi đó, D rõ ràng là một R-môđun phẳng chứa c vì C phẳng (trên vành Dedekind ta luôn có tính chất môđun con của môđun phẳng cũng là môđun phẳng). Thêm vào đó, D có hạng hữu hạn vì $D\otimes K = (D_K\cap C)\otimes K = D_K \cap C_K = D_K$ theo Bổ đề 2.1. Hơn nữa, do định nghĩa của D, ta có C/D là môđun không có xoắn trên R, do đó nó là môđun phẳng vì R là vành Dedekind. Việc còn lại là ta sẽ chứng minh D là một đối đại số con của C. Sau khi hạn chế Δ lên $D\subset C$ và mở rộng vô hướng lên K, ta có biểu đồ giao hoán

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "i_1"] & C\otimes C \arrow[d, "i_2"] \\ D_K, \arrow[r, "\Delta_K"] & C_K\otimes C_K \end{tikzcd}$$

và để đơn giản ta đặt $\alpha := Ker(id\otimes\Pi)\oplus(\Pi\otimes id)$ theo ký hiệu trong bổ đề trên, ta cũng có biểu đồ sau giao hoán

$$\begin{tikzcd} C\otimes C \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "i_2"] & (C/D\otimes C)\oplus(C\otimes C/D) \arrow[d, "i_3"] \\ C_K\otimes C_K \arrow[r, "\alpha_K"] & (C_K/D_K\otimes C_K)\oplus(C_K\otimes C_K/D_K), \end{tikzcd}$$

trong đó i_1, i_2, i_3 đều là các đơn ánh. Hợp thành hai biểu đồ trên ta nhận được biểu đồ giao hoán:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\alpha\circ\Delta"] \arrow[d, "i_1"] & (C/D\otimes C)\oplus(C\otimes C/D) \arrow[d, "i_3"] \\ D_K \arrow[r, "\alpha_K\circ\Delta_K"] & (C_K/D_K\otimes C_K)\oplus(C_K\otimes C_K/D_K). \end{tikzcd}$$

Khi đó, vì D_K là K-đối đại số con của C_K nên ánh xạ hợp thành là ánh xạ không $\Delta_K\circ\alpha_K\circ i_1 = 0$. Suy ra $i_3\circ\alpha\circ\Delta$ là ánh không. Do đó, $\alpha\circ\Delta = 0$ và điều này dẫn đến $Im\Delta \subset Ker\alpha = D\otimes D$ (theo bổ đề trên) hay $\Delta(D)\subset D\otimes D$. Vậy, ta có thể kết luận D là một đối đại số con của C và định lý được chứng minh.

Hệ quả 2.6 *Cho R là vành Dedekind và C là đối đại số phẳng trên R. Khi đó mỗi tập con hữu hạn $\{c_i, i\in I\}$ (I là tập có chỉ số hữu hạn) của C đều nằm trong một đối đại số con phẳng đặc biệt của C có hạng hữu hạn. Đặc biệt hơn, mỗi môđun con hữu sinh*

DOI: 10.26459/hueunijns.v131i1C.6489

của C cũng nằm trong một đối đại số con phẳng đặc biệt của C có hạng hữu hạn.

Chứng minh. Giả sử M là một môđun con hữu hạn sinh của C. Khi đó M sinh bởi một tập hữu hạn. Bây giờ chỉ cần lập luận tương tự như chứng minh định lý trên ta có điều phải chứng minh.

Hệ quả 2.7 *([6, Proposition 3.1.5]) Giả sử C một đối đại số và xạ ảnh như một môđun trên R. Khi đó, C là hữu hạn địa phương đặc biệt như một đối đại số và do đó thỏa mãn định lý cơ bản cho các đối đại số.*

Chứng minh. Vì mỗi môđun xạ ảnh đều là hạng tử trực tiếp của một môđun tự do nên theo chứng minh của mệnh đề trên ta có E là môđun con của môđun tự do. Hơn nữa, E có hạng hữu hạn. Áp dụng [5, Lemma 3.17], ta nhận được E phải là môđun hữu hạn sinh trên R.

3 Cấu trúc môđun cho vành tọa độ của lược đồ nhóm affine

Định lý cơ bản cho các đối đại số trên một trường giữ vai trò quan trọng trong việc xác định cấu trúc của các lược đồ nhóm affine trên trường [8, Section 3.3]. Vành tọa độ của một lược đồ nhóm là một vành có cấu trúc của một đại số Hopf giao hoán, do đó cũng có cấu trúc của một đối đại số. Vành tọa độ trong trường hợp này khi xét như một đối đại số luôn là hợp của các đối đại số con hữu hạn chiều và do đó là hợp của các đại số Hopf con hữu hạn sinh. Điều này dẫn đến mỗi lược đồ nhóm là giới hạn xạ ảnh của các lược đồ nhóm kiểu hữu hạn với các đồng cấu chuyển đều phẳng trung thành [8, Section 14.1]. Trên một vành Dedekind cho trước, mỗi đối đại số xạ ảnh như một R-môđun đều là *hữu hạn địa phương đặc biệt* [6, Proposition 3.1.5 (ii)], do đó mỗi lược đồ nhóm có vành tọa độ xạ ảnh đều là giới hạn xạ ảnh của các lược các đồ nhóm kiểu hữu hạn với các đồng cấu chuyển đều phẳng trung thành [6, Theorem 4.1.1]. Một câu hỏi tự nhiên đặt ra là những lược đồ nhóm affine nào có vành tọa độ xạ ảnh như một R-môđun. Trong [6, Proposition 3.1.7], các tác giả đã chỉ ra vành tọa độ của các lược đồ nhóm affine phẳng kiểu hữu hạn với thớ tổng quát rút gọn và liên thông là *hữu hạn địa phương đặc biệt* do đó xạ ảnh như một R-môđun [6, Proposition 3.1.7 (i)]. Trong mục này, chúng tôi sẽ mở rộng kết quả cho lược đồ nhóm affine phẳng kiểu hữu hạn với thớ liên thông (ở đây giả thiết về tính rút gọn của thớ tổng quát được bỏ qua) và Định lý 2.5 được sử dụng để chứng minh kết quả này.

Khái niệm lược đồ nhóm affine trên trường được định nghĩa trong [8, Section1.4]. Đối với khái niệm lược đồ nhóm affine trên một vành giao hoán tùy ý người đọc có thể tham khảo [7, Chapter 2]. Để thuận tiện chúng tôi đưa ra định nghĩa dưới đây.

Định nghĩa 3.1 *Một lược đồ nhóm affine G trên R là một hàm tử đi từ phạm trù các R-đại số giao hoán đến phạm trù các tập hợp* Sets *có ảnh nằm trong phạm trù các nhóm, $G: Alg_R \to \mathcal{G}rs$ mà biểu diễn được, tức là tồn tại một $R-$ đại số giao hoán, ký hiệu là $R[G]$, sao cho*

$$G(A) = Hom_{R-Alg}(R[G], A),$$

với mọi R-đại số $A \in Alg_R$. Khi đó, $R[G]$ được gọi là vành tọa độ của G.

Bản thân $R[G]$ có cấu trúc của một đại số Hopf giao hoán. Tuy nhiên, ở đây chúng ta chỉ quan tâm đến cấu trúc đối đại số của nó. Điều này có thể giải thích như sau: Vành tọa độ $R[G]$ của lược đồ nhóm affine G có cấu trúc đối đại số cảm sinh từ các phép toán kết hợp và đơn vị trên nhóm. Thật vậy, hàm tử $G\times G$ xác định bởi $A \to G(A)\times G(A)$ được biểu diễn bởi tích ten xơ $R[G]\otimes R[G]$. Theo Bổ đề Yoneda, cấu xạ của các hàm tử $m: G\times G \to G$ định nghĩa duy nhất một đồng cấu giữa các R-đại số $\Delta: R[G]\otimes R[G] \to R[G]$. Tương tự, đối với đơn vị ta thu được đối đơn vị $\epsilon: R[G] \to R$. Từ tính kết

pISSN 1859-1388
eISSN 2615-9678

hợp và tính chất của phần tử đơn vị của nhóm ta thu được các biểu đồ giao hoán trong Định nghĩa 1.1. Vậy $R[G]$ tự nó là một đối đại số trên R.

Đặt $I := ker(\epsilon)$, I còn được gọi là iđêan dấu của $R[G]$. Với lược đồ nhóm đại số liên thông trên một trường, iđêan dấu có tính chất giao của tất cả lũy thừa bị triệt tiêu theo chứng minh trong [4, Lemma 2.2.7].

Bổ đề 3.2 *([4, Lemma 2.2.7]) Giả sử G là một lược đồ nhóm kiểu hữu hạn liên thông trên một trường với iđêan dấu I. Khi đó $\bigcap_n I^n = 0$.*

Mỗi lược đồ nhóm affine trên R đều cảm sinh một lược đồ nhóm trên trường phân phân thức của nó được định nghĩa $G_K := SpecG \times_{SpecR} SpecK$ và gọi là thớ tổng quát của G. Kết quả sau đây là mở rộng của [6, Proposition 3.1.7].

Mệnh đề 3.3 *Cho G là một lược đồ nhóm affine phẳng thuộc kiểu hữu hạn trên vành Dedekind R. Giả sử thớ tổng quát G_K liên thông. Khi đó $R[G]$ là môđun xạ ảnh trên R.*

Chứng minh. Gọi I là iđêan dấu của $R[G]$. Vì $R[G]$ là môđun phẳng trên R, ta có thể xét đơn ánh $R[G] \rightarrowtail R[G] \otimes_R K = K[G_K]$, khi đó iđêan dấu của $K[G_K]$ là $I_K = I \otimes_R K$. Với giả thiết G_K liên thông và G_K thuộc kiểu hữu hạn (do G thuộc kiểu hữu hạn), ta luôn có $\bigcap_m (I_K)^m = 0$ theo bổ đề trên. Lấy $c \in R[G]$ tùy ý. Khi đó, theo Định lý 2.5, tồn tại một đối đại số con có hạng hữu hạn C của $R[G]$ chứa c và $R[G]/C$ phẳng trên R. Khi đó, tồn tại số nguyên dương n sao cho $C_K \cap (I_K)^n = 0$.
Hơn nữa, $(C \cap I^n) \otimes K = C_K \cap (I^n \otimes K) = 0$ do $I_K^n = I^n \otimes K$. Mặt khác, $C \cap I^n \subset C$ là môđun phẳng trên R. Vì vậy, $C \cap I^n = 0$ và hệ quả là ánh xạ $C \to R[G]/I^n$, $c \mapsto c + I^n$ là đơn ánh giữa các R-môđun. Mặt khác, vì G là lược đồ nhóm kiểu hữu hạn và R là vành Noetherian nên $R[G]/I^n$ là hữu hạn sinh như một R-môđun, do đó C cũng hữu hạn sinh như R-môđun. Đặc biệt, $R[G]$ là hữu hạn địa phương đặc biệt và do đó là môđun Mittag-Leffler. Hơn nữa, $R[G]$ hữu hạn sinh đếm được trên R do G thuộc kiểu hữu hạn. Điều này cho phép ta kết luận được $R[G]$ là môđun xạ ảnh trên R theo kết quả [6, Proposition 3.1.5].

Một vành định giá rời rạc là vành Dedekind địa phương và cũng là miền iđêan chính, do đó mọi môđun xạ ảnh đều là môđun tự do. Ta có một hệ quả trực tiếp của mệnh đề trên như sau.

Hệ quả 3.4 *Cho G là một lược đồ nhóm phẳng thuộc kiểu hữu hạn trên vành định giá rời rạc R. Giả sử thớ tổng quát G_K liên thông. Khi đó $R[G]$ là tự do như một R-môđun.*

Tài liệu tham khảo

1. Dascalesu S, Raianu C. Hopf Algebra: An Introduction. NewYork: CRC Press; 2000.
2. Michaelis W. Coassociative coalgebras. In: Hazewinkel M, editor. Handbook of Algebra. 3: North-Holland; 2003. p. 587-788.
3. Sweedler E. Hopf algebras. Mathematics Lecture Note Series. New York : W A Benjamin Inc; 1969.
4. Hashimoto M. Auslander Buchweitz Approximations of Equivariant Modules. Cambridge: Cambridge University Press; 2000.
5. Hazewinkel M. Cofree coalgebras and multivariable recursiveness. Journal of Pure and Applied Algebra. 2003;183(1):61-103.
6. Duong ND, Hai PH. Tannakian duality over Dedekind rings and applications. Mathematische Zeitschrift. 2018;288(3):1103-42.
7. Jantzen JC. Representations of algebraic groups. Pure and Applied Mathematics, 131. Boston: Academic Inc; 1987.
8. Waterhouse WC. Introduction to affine group schemes. New York: Springer; 1979.