

HIỆU ỨNG STARK QUANG HỌC CỦA EXCITON TRONG CHẤM LƯỢNG TỬ PHÒNG CẦU DẠNG DỆT InGaAs/InAlAs

Lê Thị Ngọc Bảo¹, Đinh Như Thảo^{2*}

¹ Trường Đại học Khoa học, Đại học Huế, 77 Nguyễn Huệ, Huế, Việt Nam

² Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế, 34 Lê Lợi, Huế, Việt Nam

* Tác giả liên hệ Đinh Như Thảo <dnthao@hueuni.edu.vn>

(Ngày nhận bài: 10-01-2022; Ngày chấp nhận đăng: 02-06-2022)

Tóm tắt. Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại của hiệu ứng Stark quang học của exciton trong chấm lượng tử phòng cầu dạng dệt bằng lý thuyết hàm sóng tái chuẩn hóa. Một sóng bơm mạnh đã được áp dụng để kết cặp các trạng thái lượng tử hóa của điện tử trong vùng dẫn trong mô hình hệ ba mức. Chúng tôi quan sát thấy hai vạch phổ hấp thụ liên vùng riêng biệt, thể hiện sự tách các mức năng lượng của điện tử do hiệu ứng Stark quang học. Đồng thời, các ảnh hưởng của năng lượng trường bơm, kích thước và dạng hình học của chấm lượng tử lên các đặc trưng của hiệu ứng cũng được khảo sát chi tiết.

Từ khóa: hiệu ứng Stark quang học, chấm lượng tử phòng cầu dạng dệt, exciton, InGaAs, InAlAs

Optical Stark effect of exciton in InGaAs/InAlAs oblate spheroidal quantum dots

Le Thi Ngoc Bao¹, Dinh Nhu Thao^{2*}

¹ University of Sciences, Hue University, 77 Nguyen Hue St., Hue, Vietnam

² University of Education, Hue University, 34 Le Loi St., Hue, Vietnam

* Correspondence to Dinh Nhu Thao <dnthao@hueuni.edu.vn>

(Received: 10 January 2022; Accepted: 02 June 2022)

Abstract. In this paper, we studied the existence of the exciton optical Stark effect in oblate spheroidal quantum dots by using the renormalized wavefunction theory. A strong pump wave was applied to couple the electron quantization states in the conduction band in a three-level system model. We observed two separate peaks of the interband absorption transitions representing the separation of the electron energy levels due to the optical Stark effect. In addition, the influence of the pump field energy, size, and geometry of the quantum dots on the effect characteristics was also investigated in detail.

Keywords: optical Stark effect, oblate spheroidal quantum dots, exciton, InGaAs, InAlAs

1 Giới thiệu

Trong những năm gần đây, nhiều nghiên cứu liên quan đến các tính chất quang trong các cấu trúc thấp chiều đã nhận được sự quan tâm của các nhà khoa học [1-6]. Các nghiên cứu này được cho là có tính ứng dụng cao trong các lĩnh vực máy tính quang, máy tính lượng tử và thông tin lượng tử. Nhiều công trình nghiên cứu về các tính chất quang trong các chấm lượng tử có hình dạng đơn giản, chẳng hạn như hình trụ, hình lập phương và hình cầu đã được công bố [7-11]. Những nghiên cứu này cho thấy các tính chất quang của các chấm lượng tử phụ thuộc rất nhiều vào trường ngoài và kích thước của các chấm lượng tử. Điều đáng nói là dạng hình học của các chấm lượng tử cũng tạo ra sự khác biệt rất lớn đối với các tính chất quang học của chấm lượng tử [12]. Bên cạnh đó, các chấm lượng tử với hình dạng đặc biệt và phức tạp như các chấm lượng tử hình phỏng cầu cũng là đối tượng cần được quan tâm nghiên cứu chi tiết. Các mức năng lượng lượng tử hóa của hạt tải trong các chấm lượng tử này phụ thuộc nhiều vào các tham số cấu trúc [13-15]. Điều này có thể dẫn đến khả năng dễ dàng điều khiển các đặc tính quang của các thiết bị được chế tạo từ các chấm lượng tử này thông qua việc điều chỉnh các tham số cấu trúc.

Một trong những tính chất quang thu hút sự chú ý của các nhà nghiên cứu là sự kết cặp của các mức năng lượng của hạt tải dưới tác dụng của một xung ánh sáng cường độ cao, dẫn đến sự tách vạch phổ trong phổ hấp thụ, được gọi là hiệu ứng Stark quang học [16-18]. Đã có nhiều công trình nghiên cứu hiệu ứng Stark quang học sử dụng giản đồ hai hoặc ba mức năng lượng bằng các phương pháp lý thuyết và thực nghiệm khác nhau. Đối với nghiên cứu lý thuyết, các nhà khoa học đã áp dụng nhiều phương pháp như lý thuyết hàm sóng tái chuẩn hóa [19], lý thuyết ma trận mật độ [20], phương pháp sai phân hữu hạn [21], lý thuyết phát quang [22] hay lý thuyết nhiễu loạn nhiều hạt không cân bằng [23]. Trong nghiên cứu thực nghiệm, công

nghệ bom – dò đã được nhiều nhà khoa học lựa chọn [24, 25]. Bên cạnh đó, nhiều công trình nghiên cứu thực nghiệm liên quan đến hiệu ứng Stark quang học đã đề xuất một số ứng dụng triển vọng trong việc chế tạo các linh kiện quang cho các máy tính lượng tử trong tương lai như là các chuyển mạch quang siêu nhanh, các bộ điều biến quang tốc độ cao hay các transistor hiệu ứng trường điều khiển quang học [17, 26, 27].

Trong công trình này, chúng tôi áp dụng phương pháp hàm sóng tái chuẩn hóa cho mô hình ba mức năng lượng của hạt tải trong chấm lượng tử phỏng cầu dạng dẹt và nghiên cứu những tính chất nổi bật của hiệu ứng Stark quang học ba mức của exciton. Các phần chính của bài báo như sau. Phần 2 trình bày cơ sở lý thuyết. Phần 3 trình bày các kết quả và thảo luận liên quan. Cuối cùng, phần 4 trình bày các kết luận.

2 Cơ sở lý thuyết

2.1 Hàm sóng và các mức năng lượng của điện tử và lỗ trống trong chấm lượng tử phỏng cầu dạng dẹt

Xét một chấm lượng tử phỏng cầu dạng dẹt nằm đối xứng quanh trục z với a và c là độ dài các bán trục của chấm trong mặt phẳng xOy và hướng z , trong đó x, y, z là các tọa độ trong hệ tọa độ Cartesian với gốc tọa độ tại tâm đối xứng của hình phỏng cầu dạng dẹt (Hình 1). Để đơn giản, chúng tôi giả thiết chấm lượng tử nằm trong một thế năng vô hạn có dạng [13-15, 28]

$$U(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & \text{khi } 0 < S(\vec{r}_i) < 1 \\ \infty, & \text{khi } S(\vec{r}_i) \geq 1 \end{cases}, \quad (1)$$

trong đó $S(\vec{r}_i)$ phụ thuộc vào các tham số a và c , là các bán trục của chấm lượng tử hình phỏng cầu như sau

$$S(\vec{r}_i) = \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}, \quad (2)$$

trong đó $c < a$. Bề mặt của chấm lượng tử phỏng cầu dạng dẹt có dạng như ở Hình 1.

Trong trường hợp $c > a$, bề mặt giới hạn là chấm lượng tử phỏng cầu dạng thuôn; chúng tôi đã khảo sát trường hợp này trong công trình [36]. Trong công trình đó, chúng tôi cũng sử dụng phương pháp hàm sóng tái chuẩn hóa nhưng áp dụng trong hệ tọa độ phỏng cầu dạng thuôn. Như đã biết, hình dạng của các chấm lượng tử ảnh hưởng mạnh lên hàm sóng và phổ năng lượng của các hạt. Vì vậy, với hai chấm lượng tử có hình dạng khác nhau thì hàm sóng và phổ năng lượng tương ứng là hoàn toàn khác nhau, kể cả khi các chấm lượng tử có cùng thể tích. Trong bài báo này, chúng tôi áp dụng phương pháp đó cho bài toán trong hệ tọa độ phỏng cầu dạng dẹt. Không chỉ vậy, hàm sóng của hạt trong trường hợp này hoàn toàn khác trường hợp trong chấm lượng tử phỏng cầu dạng thuôn dù có quy về cùng một hệ tọa độ. Điều này dẫn đến phổ hấp thụ của exciton trong các chấm lượng tử phỏng cầu dạng dẹt này và các chấm lượng tử phỏng cầu dạng thuôn là hoàn toàn khác nhau. Tuy nhiên, để thuận tiện cho việc so sánh giữa chấm lượng tử phỏng cầu dạng dẹt ($\chi < 1$) và chấm lượng tử phỏng cầu dạng thuôn ($\chi > 1$), trong công trình này chúng tôi sẽ sử dụng bộ các ký hiệu toán học giống với công trình [36].

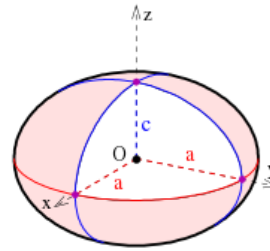
$$A_{nlm} = \sqrt{\frac{\chi^3}{2\pi c^3 e^3 \int_0^1 \int_{-1}^{+1} (\xi^2 + \eta^2) J_{lm}^{(1)*}(-ih, i\xi) S_{lm}^{(1)*}(-ih, \eta) J_{lm}^{(1)}(-ih, i\xi) S_{lm}^{(1)}(-ih, \eta) d\xi d\eta}}, \quad (5)$$

trong đó tỉ số các bán trục của ê-líp được ký hiệu

$$\chi = \frac{c}{a}, \quad (6)$$

và e là tâm sai của ê-líp

$$e = \sqrt{1 - \chi^2}. \quad (7)$$



Hình 1. Minh họa chấm lượng tử phỏng cầu dạng dẹt [29]

Trước tiên, trong phép gần đúng hàm bao khối lượng hiệu dụng, hàm sóng toàn phần của điện tử (lỗ trống) trong chấm lượng tử phỏng cầu dạng dẹt với thể vô hạn có dạng

$$\Lambda_{nlm}^{e,h}(\vec{r}) = u_{c,v}(\vec{r}) \Psi_{nlm}^{e,h}(\vec{r}), \quad (3)$$

trong đó $\vec{r} = (\xi, \eta, \varphi)$; (ξ, η, φ) là các thành phần tọa độ trong hệ tọa độ phỏng cầu dạng dẹt khi $0 \leq \xi \leq +\infty, -1 \leq \eta \leq +1$ và $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; $u_{c,v}(\vec{r})$ là các hàm sóng Bloch trong vùng dẫn và vùng hóa trị; $\Psi_{nlm}^{e,h}(\vec{r})$ là các hàm sóng bao của điện tử (lỗ trống) trong chấm lượng tử phỏng cầu dạng dẹt và có dạng [13-15, 28]

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi_{nlm}^{e,h}(\xi, \eta, \varphi) = A_{nlm} J_{lm}^{(1)}(-ih, i\xi) S_{lm}^{(1)}(-ih, \eta) e^{im\varphi}, \quad (4)$$

với $n = 1, 2, 3, \dots$; $l = 0, 1, 2, 3, \dots$; $m = -l, \dots, 0, \dots, +l$; $J_{lm}^{(1)}(-ih, i\xi)$ và $S_{lm}^{(1)}(-ih, \eta)$ lần lượt là các hàm phỏng cầu xuyên tâm và các hàm phỏng cầu góc dạng dẹt loại 1; A_{nlm} là hệ số chuẩn hóa

Chọn gốc tính năng lượng tại đỉnh vùng hóa trị, biểu thức năng lượng của điện tử và lỗ trống lần lượt được xác định như sau

$$E_{nlm}^e = E_g + \frac{\hbar^2 k_{nlm}}{2m_e^*}, \quad (8)$$

và

$$E_{nlm}^h = \frac{\hbar^2 k_{nlm}}{2m_h^*}, \quad (9)$$

trong đó E_g là độ rộng vùng cấm của chất bán dẫn; $m_{e,h}^*$ là khối lượng hiệu dụng của điện tử (lỗ trống) và

$$k_{nlm} = \left(\frac{h}{f}\right)^2. \quad (10)$$

Các giá trị của h được xác định từ điều kiện biên

$$J_{lm}^{(1)}(-ih, i\bar{\xi}) = 0, \quad (11)$$

trong đó

$$\bar{\xi} = \frac{\chi}{\sqrt{1-\chi^2}} = \frac{\chi}{e}, \quad (12)$$

và

$$f = \frac{c}{\bar{\xi}} = \frac{c \cdot e}{\chi} = a \cdot e. \quad (13)$$

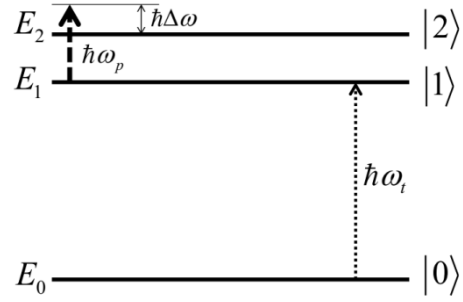
Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu hiệu ứng Stark quang học ba mức của exciton trong chấm lượng tử phòng cầu dạng dẹt. Do đó, chúng tôi cần khảo sát một hệ gồm ba mức năng lượng của điện tử và lỗ trống, gồm mức thấp nhất có năng lượng E_0 , hai mức còn lại có năng lượng E_1 và E_2 (Hình 2).

Các mức năng lượng của hạt tải được xác định như sau

$$\begin{cases} E_0 \equiv E_{100}^h \\ E_1 \equiv E_{100}^e \\ E_2 \equiv E_{110}^e \end{cases}, \quad (14)$$

và các hàm sóng không phụ thuộc thời gian tương ứng với các mức năng lượng trên là

$$\begin{cases} \Pi_0(\vec{r}) \equiv \Lambda_{100}^h(\vec{r}) \\ \Pi_1(\vec{r}) \equiv \Lambda_{100}^e(\vec{r}) \\ \Pi_2(\vec{r}) \equiv \Lambda_{110}^e(\vec{r}) \end{cases}. \quad (15)$$



Hình 2. Sơ đồ mô hình hệ ba mức của điện tử và lỗ trống

Ghi chú: Ký hiệu E_0 là mức năng lượng thấp nhất của lỗ trống tương ứng với trạng thái được ký hiệu $|0\rangle$; E_1 và E_2 là hai mức năng lượng thấp nhất của điện tử tương ứng với các trạng thái được ký hiệu $|1\rangle$ và $|2\rangle$; ω_p và ω_l tương ứng là các tần số của laser bơm và laser dò; $\Delta\omega$ là độ lệch tần số cộng hưởng của sóng bơm với hiệu hai mức năng lượng lượng tử hóa của điện tử.

Các hàm sóng phụ thuộc thời gian của hạt tải có dạng như sau

$$\begin{cases} \Pi_0(\vec{r}, t) = \Pi_0(\vec{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 t} \\ \Pi_1(\vec{r}, t) = \Pi_1(\vec{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} \\ \Pi_2(\vec{r}, t) = \Pi_2(\vec{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} E_2 t} \end{cases}. \quad (16)$$

2.2 Hàm sóng và các mức năng lượng của điện tử khi có tác dụng của laser bơm

Để nghiên cứu sự tồn tại và các tính chất của hiệu ứng Stark quang học của exciton trong chấm lượng tử phòng cầu dạng dẹt, chúng tôi sử dụng đồng thời hai sóng điện tử chiếu lên hệ. Một sóng bơm mạnh cộng hưởng với khoảng cách giữa hai mức lượng tử hóa của điện tử, tác dụng lên các quá trình chuyển dời nội vùng của điện tử (mũi tên đứt nét trên Hình 2). Một sóng dò yếu xác định các chuyển dời liên vùng từ mức của lỗ trống lên các mức của điện tử (mũi tên chấm chấm trên Hình 2). Các sóng điện tử được chọn như sau

$$\vec{E}(t) = \vec{n} A_x e^{-i\omega_x t}, \quad (17)$$

trong đó \vec{n} là vectơ đơn vị chỉ hướng truyền sóng; A_x và ω_x là biên độ và tần số của laser; ký hiệu $x = p$ chỉ sóng bơm; $x = t$ chỉ sóng dò. Trong trường hợp cường độ trường điện từ không quá mạnh, có thể bỏ qua các số hạng bậc cao và sử dụng các gần đúng thì biểu thức của Hamiltonian tương tác giữa hạt với trường điện từ có thể được viết như sau [30, 31]

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\frac{q}{m_0} \frac{A_x e^{-i\omega_x t}}{i\omega_x} \vec{n} \cdot \hat{\vec{p}} \equiv \hat{V}_x e^{-i\omega_x t}, \quad (18)$$

trong đó, đặt

$$\hat{V}_x = -\frac{q}{m_0} \frac{A_x}{i\omega_x} \vec{n} \cdot \hat{\vec{p}}, \quad (19)$$

với q , m_0 và \vec{p} lần lượt là điện tích, khối lượng trần và vectơ xung lượng của điện tử.

Yếu tố ma trận cho chuyển dời quang giữa hai mức năng lượng lượng tử hóa của điện tử được xác định như sau

$$V_{21} = \frac{qA_p}{m_0 i\omega_p} \frac{m_e^*}{\hbar} A_{110}^* A_{100} (E_2 - E_1) 2\pi f^4 \times \int_0^{i\xi+1} \int_{-1}^{\xi} \xi \eta (\xi^2 + \eta^2) J_{10}^{(1)*}(-ih, i\xi) S_{10}^{(1)*}(-ih, \eta) J_{00}^{(1)}(-ih, i\xi) S_{00}^{(1)}(-ih, \eta) d\xi d\eta. \quad (23)$$

Khi có tác dụng của laser bơm cộng hưởng với khoảng cách hai mức năng lượng lượng tử hóa của điện tử thì hàm sóng của điện tử bị tái chuẩn hóa dưới tác dụng của sóng bơm và có dạng như sau

$$\Pi_{\text{mix}}^e(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\Omega_R} \left(\alpha_1 e^{i\alpha_2 t} + \alpha_2 e^{-i\alpha_2 t} \right) e^{\frac{i}{\hbar} E_1 t} \Pi_1(\vec{r}) - \frac{V_{21}}{2\hbar\Omega_R} \left(e^{i\alpha_1 t} - e^{-i\alpha_1 t} \right) e^{\frac{i}{\hbar} E_2 t} \Pi_2(\vec{r}), \quad (24)$$

trong đó

$$v_{21} = \langle \Pi_2(\vec{r}) | \hat{H}_{\text{int}} | \Pi_1(\vec{r}) \rangle = \langle \Pi_2(\vec{r}) | \hat{V}_p | \Pi_1(\vec{r}) \rangle e^{-i\omega_p t} \equiv V_{21} e^{-i\omega_p t}, \quad (20)$$

trong đó

$$V_{21} = \frac{qA_p}{m_0 i\omega_p} \frac{m_e^*}{\hbar} (E_2 - E_1) \langle \Psi_{110}^e(\vec{r}) | \vec{n} \cdot \Psi_{100}^e(\vec{r}) \rangle, \quad (21)$$

với A_p và ω_p là biên độ và tần số của laser bơm.

Từ phương trình (4), suy ra

$$\begin{cases} \Psi_{110}^e(\vec{r}) = A_{110} J_{10}^{(1)}(-ih, i\xi) S_{10}^{(1)}(-ih, \eta) \\ \Psi_{100}^e(\vec{r}) = A_{100} J_{00}^{(1)}(-ih, i\xi) S_{00}^{(1)}(-ih, \eta) \end{cases}. \quad (22)$$

Chọn vectơ phân cực dọc theo trục z và thay phương trình (22) vào phương trình (21), đồng thời thực hiện một số phép biến đổi trung gian, chúng tôi thu được biểu thức của V_{21} như sau

$$\begin{cases} \alpha_1 = \Omega_R - \frac{\Delta\omega}{2} \\ \alpha_2 = \Omega_R + \frac{\Delta\omega}{2} \\ \Delta\omega = \omega_p - \omega_{21} \\ \hbar\omega_{21} = E_2 - E_1 \\ \Omega_R = \left[\left(\frac{\Delta\omega}{2} \right)^2 + \frac{|V_{21}|^2}{\hbar^2} \right]^{\frac{1}{2}} \end{cases}. \quad (25)$$

Có thể viết lại hàm sóng tái chuẩn hóa của điện tử dưới tác dụng của sóng bơm ở biểu thức (24) như sau

$$\Pi_{\text{mix}}^e(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\Omega_R} \left(\alpha_1 e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} + \alpha_2 e^{\frac{i}{\hbar} E_1 t} \right) \Pi_1(\vec{r}) - \frac{V_{21}}{2\hbar\Omega_R} \left(e^{-\frac{i}{\hbar} E_2 t} - e^{\frac{i}{\hbar} E_2 t} \right) \Pi_2(\vec{r}), \quad (26)$$

Từ phương trình (26), suy ra phổ năng lượng tương ứng với trạng thái tái chuẩn hóa gồm bốn mức như sau

$$\begin{cases} E_1^+ = E_1 + \hbar\alpha_1 \\ E_1^- = E_1 - \hbar\alpha_2 \end{cases}, \quad (27)$$

và

$$\begin{cases} E_2^+ = E_2 + \hbar\alpha_2 \\ E_2^- = E_2 - \hbar\alpha_1 \end{cases}. \quad (28)$$

2.3 Phổ hấp thụ của exciton khi không có tác dụng của laser bơm

Bây giờ, chúng tôi nghiên cứu phổ hấp thụ của exciton trong chấm lượng tử thông qua các yếu tố ma trận của chuyển dời liên vùng từ mức của lỗ trống lên các mức của điện tử để tìm kiếm các dấu hiệu chứng tỏ sự tồn tại của hiệu ứng Stark quang học của exciton trong chấm lượng tử bán dẫn hình ê-líp dạng dẹt. Theo quy tắc lọc lựa đối với chuyển dời quang liên vùng trong chấm lượng tử thì chuyển dời được phép chỉ xảy ra đối với cặp mức năng lượng thấp nhất của lỗ trống và điện tử. Trước hết, chúng tôi sẽ khảo sát trường hợp khi hệ chưa chịu tác dụng của laser bơm. Dưới tác dụng của laser dò, yếu tố ma trận của chuyển dời giữa hai mức lượng tử hóa của điện tử và lỗ trống là

$$T_{10} = \left\langle \Pi_1(\vec{r}, t) \left| \hat{H}_{\text{int}} \right| \Pi_0(\vec{r}, t) \right\rangle. \quad (29)$$

Thay \hat{H}_{int} ở phương trình (18) vào phương trình (29), biểu thức của yếu tố ma trận chuyển dời khi không có tác dụng của laser bơm trở thành

$$T_{10} = -\frac{eA_t p_{cv}}{m_0 \omega_t} e^{\frac{i}{\hbar}(E_1 - E_2 - \hbar\omega_t)t}, \quad (30)$$

trong đó A_t và ω_t là biên độ và tần số của laser dò; p_{cv} là yếu tố ma trận phân cực giữa vùng dẫn và vùng hóa trị và có dạng

$$p_{cv} = \left\langle u_c(\vec{r}) \left| \vec{n} \hat{p} \right| u_v(\vec{r}) \right\rangle. \quad (31)$$

Phổ hấp thụ của exciton được xác định thông qua biểu thức của tốc độ chuyển dời. Theo quy tắc vàng Fermi, chúng tôi tìm được biểu thức của tốc độ chuyển dời như sau

$$W_0 = \frac{2\pi}{\hbar} |T_{10}|^2 \delta(E_1 - E_0 - \hbar\omega_t), \quad (32)$$

Thay phương trình (30) vào phương trình (32), biểu thức của tốc độ chuyển dời có dạng như sau

$$W_0 = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{qA_t p_{cv}}{m_0 \omega_t} \right)^2 \delta(E_1 - E_0 - \hbar\omega_t). \quad (33)$$

Áp dụng công thức hàm dạng Lorentz [32]

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\Gamma}{x^2 + \Gamma^2}, \quad (34)$$

phương trình (33) trở thành

$$W_0 = \frac{2}{\hbar} \left(\frac{qA_t p_{cv}}{m_0 \omega_t} \right)^2 \frac{\Gamma}{(E_g^{\text{dot}} - \hbar\omega_t)^2 + \Gamma^2}, \quad (35)$$

trong đó

$$E_g^{\text{dot}} = E_1 - E_0, \quad (36)$$

và Γ là độ rộng vạch phổ hấp thụ được đưa vào một cách hiện tượng luận.

2.4 Phổ hấp thụ của exciton khi có tác dụng của laser bơm

Trong mục này, chúng tôi tính tốc độ chuyển dời liên vùng khi laser bơm bắt đầu hoạt động. Để tìm kiếm hiệu ứng Stark quang học của exciton trong mô hình ba mức trong chấm lượng tử phỏng cầu dạng dẹt thì cường độ của laser bơm được giả sử mạnh hơn đáng kể so với cường độ của laser dò. Đồng thời, độ lệch của laser bơm với hiệu hai mức năng lượng của điện tử phải nhỏ hơn nhiều so với năng lượng của laser bơm và vùng cấm của vật liệu trong chấm lượng tử

$$\hbar\Delta\omega \ll \hbar\omega_p \ll E_g. \quad (37)$$

Như chúng tôi đã đề cập ở phần 2.2, dưới tác dụng của một sóng bom cộng hưởng mạnh thì các điện tử bây giờ nằm trong trạng thái trộn, được mô tả bằng hàm sóng tái chuẩn hóa có dạng được xác định ở phương trình (26). Khi đó yếu tố ma trận của chuyển dời liên vùng từ trạng thái của lỗ trống lên trạng thái tái chuẩn hóa của điện tử được xác định như sau

$$T_{mix,0} = \left\langle \Pi_{mix}^e(\vec{r}, t) \left| \hat{H}_{int} \right| \Pi_0(\vec{r}, t) \right\rangle \\ = -\frac{qA_t e^{-i\omega t}}{m_0 i \omega_t} \left\langle \Pi_{mix}^e(\vec{r}, t) \left| \vec{n} \hat{p} \right| \Pi_0(\vec{r}, t) \right\rangle' \quad (38)$$

hay

$$T_{mix,0} = -\frac{qA_t p_{cv}}{m_0 i \omega_t} \left[\frac{1}{2\Omega_R} \left(\alpha_1 e^{i\alpha_2 t} + \alpha_2 e^{-i\alpha_1 t} \right) \right]^* e^{\frac{i}{\hbar} (E_g^{dot} - \hbar\omega_t) t} \quad (39)$$

Tiếp theo, thực hiện tính toán một cách tương tự như đối với trường hợp không có tác dụng của laser bom, chúng tôi xác định biểu thức của tốc độ chuyển dời liên vùng từ trạng thái của lỗ trống lên trạng thái tái chuẩn hóa của điện tử dưới tác dụng của laser bom cộng hưởng với dạng như sau

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{eA_t p_{cv}}{m_0 \omega_t} \right)^2 \left[\left(\frac{\alpha_1}{2\Omega_R} \right)^2 \delta(E_g^{dot} - \hbar\omega_t - \hbar\alpha_2) \right. \\ \left. + \left(\frac{\alpha_2}{2\Omega_R} \right)^2 \delta(E_g^{dot} - \hbar\omega_t + \hbar\alpha_1) \right] \quad (40)$$

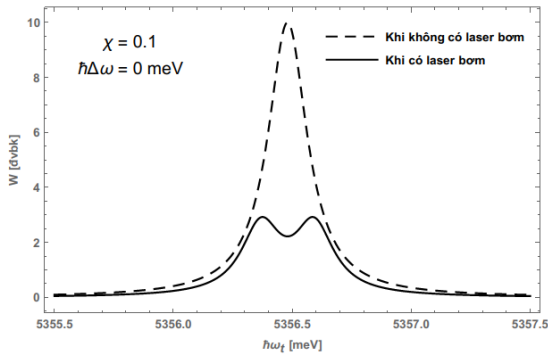
Áp dụng công thức hàm dạng Lorentz, chúng tôi thu được biểu thức gần đúng của tốc độ chuyển dời trong trường hợp có tác dụng của laser bom dưới dạng

$$W = \frac{2}{\hbar} \left(\frac{eA_t p_{cv}}{m_0 \omega_t} \right)^2 \left[\left(\frac{\alpha_1}{2\Omega_R} \right)^2 \frac{\Gamma}{(E_g^{dot} - \hbar\omega_t - \hbar\alpha_2)^2 + \Gamma^2} \right. \\ \left. + \left(\frac{\alpha_2}{2\Omega_R} \right)^2 \frac{\Gamma}{(E_g^{dot} - \hbar\omega_t + \hbar\alpha_1)^2 + \Gamma^2} \right] \quad (41)$$

3 Kết quả và thảo luận

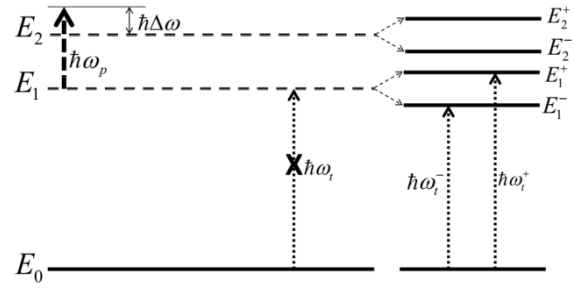
Trong phần này, chúng tôi nghiên cứu phổ hấp thụ của exciton trong chấm lượng tử hình phỏng cầu dạng dẹt $\text{In}_{0,53}\text{Ga}_{0,47}\text{As}/\text{In}_{0,52}\text{Al}_{0,48}\text{As}$ trong hai trường hợp không có và có tác dụng của laser bom. Từ đó, chúng tôi chỉ ra những dấu hiệu của sự tồn tại hiệu ứng Stark quang học của exciton trong cấu trúc chấm lượng tử này. Để thực hiện tính số, chúng tôi sử dụng các tham số như sau: khối lượng hiệu dụng của điện tử và lỗ trống trong vật liệu chấm $\text{In}_{0,53}\text{Ga}_{0,47}\text{As}$ là $m_e = 0,042m_0$ và $m_h = 0,052m_0$; độ rộng vùng cấm của vật liệu chấm là $E_g = 750 \text{ meV}$ [33, 34]; biên độ của laser bom được chọn là $A_p = 4 \times 10^4 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1}$ và độ rộng phổ được chọn là $\Gamma = 0,1 \text{ meV}$. Bên cạnh đó, chúng tôi đã chọn độ dài bán trục nhỏ là $c = 10 \text{ \AA}$; còn độ dài bán trục lớn sẽ tùy thuộc vào việc chọn giá trị của χ ($a = c/\chi$) sao cho thỏa mãn điều kiện của một cấu trúc thấp chiều là chấm lượng tử phỏng cầu dạng dẹt.

Đầu tiên, chúng tôi vẽ phổ hấp thụ của exciton trong chấm lượng tử phỏng cầu dạng dẹt với giá trị của tỉ số các bán trục $\chi = 0,1$ trong trường hợp tồn tại sóng bom cộng hưởng với khoảng cách giữa hai mức của điện tử ($\eta\Delta\omega = 0 \text{ meV}$). Hình 3 cho thấy rằng, trước khi sóng bom được bật lên, phổ hấp thụ của exciton chỉ gồm một đỉnh hấp thụ (đường đứt nét). Tuy nhiên, sau khi sóng bom được bật lên thì trong phổ hấp thụ của exciton xuất hiện hai đỉnh phổ riêng biệt (đường liền nét). Đây là dấu hiệu chứng tỏ đã xảy ra hiệu ứng Stark quang học của exciton trong cấu trúc chấm lượng tử này. Kết quả này tương tự như kết quả đã tìm được trong chấm lượng tử hình cầu [35] và hình ê-líp dạng thuẩn [36]. So sánh các kết quả tìm được trong các chấm lượng tử này, chúng tôi thấy chúng có sự tương đồng, bởi vì cả ba chấm lượng tử hình cầu, hình ê-líp dạng thuẩn và hình phỏng cầu dạng dẹt đều thuộc hệ chuẩn không chiều.



Hình 3. Sự phụ thuộc của tốc độ chuyển dời vào năng lượng photon của laser dò trong chấm lượng tử phòng cầu dạng dẹt với tỉ số của các bán trục $\chi = 0,1$ trong hai trường hợp: không có tác dụng của laser bơm (đường đứt nét) và có tác dụng của laser bơm (đường liền nét) với độ lệch cộng hưởng $\hbar\Delta\omega = 0$ meV

Sự xuất hiện hai đỉnh hấp thụ trong phổ hấp thụ của exciton khi có tác dụng của laser bơm cộng hưởng với hai mức năng lượng của điện tử có thể được giải thích như sau. Theo quy tắc lọc lựa đối với các cấu trúc chấm lượng tử thì chỉ xảy ra một chuyển dời từ mức của lỗ trống lên mức thấp nhất của điện tử khi hệ hấp thụ được một photon dò phù hợp (mũi tên chấm chấm trên Hình 2). Vì vậy, trước khi có tác dụng của sóng bơm, chỉ có duy nhất một đỉnh hấp thụ của exciton. Ngược lại, khi có sóng bơm cộng hưởng với khoảng cách giữa hai mức của điện tử thì các mức năng lượng lượng tử hóa của điện tử bị tách thành các mức con để thỏa mãn nguyên lý loại trừ Pauli; cụ thể mức E_1 sẽ bị tách thành hai mức E_1^+ và E_1^- ; mức E_2 sẽ bị tách thành hai mức E_2^+ và E_2^- . Kết quả là khi chiếu một sóng dò phù hợp vào hệ ta có thể tìm được hai chuyển dời liên vùng từ mức của lỗ trống lên hai mức con tách ra từ mức lượng tử hóa đầu tiên của điện tử (mũi tên chấm chấm trong Hình 4); vì vậy, xuất hiện hai đỉnh phân biệt trong phổ hấp thụ của exciton. Hơn nữa, do tính đối xứng của các mức con tách ra mà hai đỉnh phổ có cùng độ cao và nằm đối xứng hai bên đỉnh hấp thụ ban đầu; điều này thỏa mãn định luật bảo toàn năng lượng.

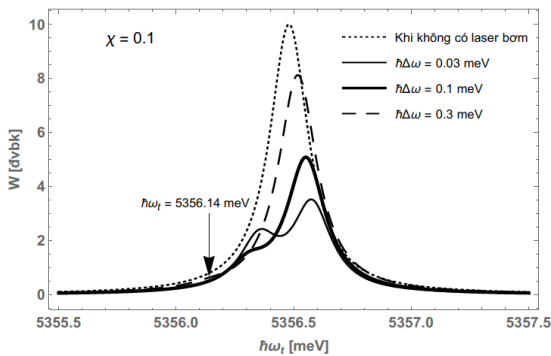


Hình 4. Sơ đồ của sự tách các mức năng lượng của điện tử dưới tác dụng của laser bơm cộng hưởng với hiệu hai mức năng lượng lượng tử hóa của điện tử

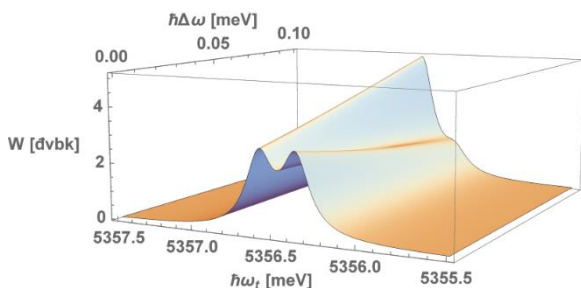
Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu chi tiết hơn hiệu ứng Stark quang học của exciton trong chấm lượng tử phòng cầu dạng dẹt thông qua việc khảo sát sự phụ thuộc phổ hấp thụ exciton vào độ lệch của sóng bơm. Hình 5 cho thấy sự phụ thuộc phổ hấp thụ của exciton khi giá trị của tỉ số các bán trục $\chi = 0,1$ trong trường hợp không có và có mặt của sóng bơm với các độ lệch khác nhau. Chúng tôi thấy rằng phổ hấp thụ của exciton trong cả ba trường hợp có mặt của sóng bơm đều chứa hai đỉnh phổ phân biệt, hàm ý rằng trong các trường hợp này đều xảy ra hiệu ứng Stark quang học. Đồng thời, độ cao của hai đỉnh hấp thụ là khác nhau và phụ thuộc vào độ lệch cộng hưởng. Khi độ lệch cộng hưởng càng lớn thì độ cao của đỉnh hấp thụ năng lượng lớn tăng dần và dịch chuyển về vị trí của đỉnh phổ ban đầu (lúc chưa bật laser bơm); trong khi đó, độ cao của đỉnh phổ còn lại thấp dần và gần như biến mất khi tăng độ lệch cộng hưởng (như trường hợp $\hbar\Delta\omega = 0,3$ meV, đường đứt nét), điều này cũng thể hiện rõ trên Hình 6. Sự chênh lệch độ cao của hai đỉnh phổ càng lớn đồng nghĩa rằng sự chênh lệch tốc độ chuyển dời càng lớn. Tuy nhiên, có thể thấy rằng tổng các tốc độ chuyển dời luôn được bảo toàn trong tất cả các trường hợp được khảo sát.

Hình 6 cho thấy rõ ràng hơn sự thay đổi độ cao và vị trí của các đỉnh hấp thụ khi độ lệch của sóng bơm tăng liên tục từ 0 đến 0,1 meV. Rõ ràng, khi tăng dần độ lệch cộng hưởng thì độ cao của đỉnh hấp thụ năng lượng lớn tăng dần, trong khi

độ cao của đỉnh hấp thụ năng lượng bé giảm dần về không. Từ Hình 5 và Hình 6, chúng tôi nhận thấy rằng đối với chấm lượng tử phòng cầu dạng dẹt, hai đỉnh hấp thụ chỉ quan sát được rõ rệt khi $\hbar\Delta\omega < 0,1$ meV, trong khi đó đối với chấm lượng tử hình ê-líp dạng thuận và chấm lượng tử hình cầu có cùng thể tích, sự xuất hiện hai đỉnh hấp thụ của exciton vẫn còn quan sát được rõ rệt khi độ lệch cộng hưởng $\hbar\Delta\omega > 0,1$ meV [35, 36]. Điều này cho thấy rằng, không những độ lệch cộng hưởng ảnh hưởng đến độ cao và vị trí của các đỉnh hấp thụ exciton mà hình dạng của các chấm lượng tử cũng ảnh hưởng rất mạnh đến độ cao và vị trí của các đỉnh hấp thụ này.

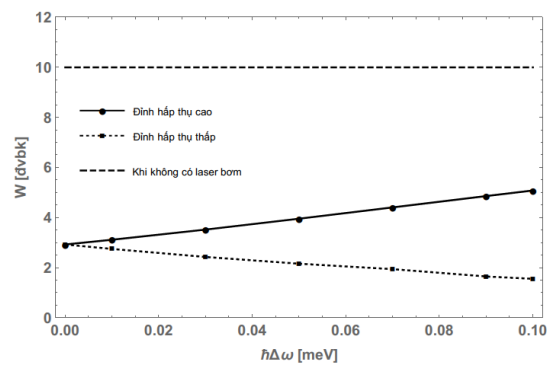


Hình 5. Sự phụ thuộc của tốc độ chuyển dời vào năng lượng photon trong chấm lượng tử phòng cầu dạng dẹt với giá trị tỉ số các bán trục là $\chi = 0,1$ trong trường hợp không có laser bơm (đường chấm chấm) và có laser bơm với các độ lệch cộng hưởng khác nhau $\hbar\Delta\omega = 0,03$ meV (đường liền nét mảnh), và $\hbar\Delta\omega = 0,1$ meV (đường liền nét đậm) và $\hbar\Delta\omega = 0,3$ meV (đường đứt nét)



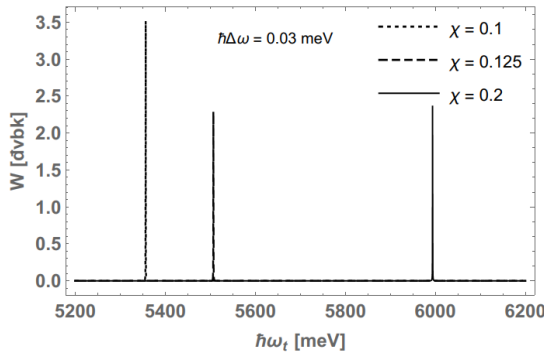
Hình 6. Phổ hấp thụ của exciton trong chấm lượng tử phòng cầu dạng dẹt với tỉ số các bán trục $\chi = 0,1$ như là hàm của năng lượng photon $\hbar\omega_t$ và độ lệch cộng hưởng của sóng bơm $\hbar\Delta\omega$

Ngoài ra, độ lệch cộng hưởng cũng ảnh hưởng mạnh đến tốc độ chuyển dời của hai đỉnh hấp thụ. Từ Hình 7, chúng tôi thấy rằng khi tăng độ lệch cộng hưởng thì tốc độ chuyển dời của đỉnh hấp thụ năng lượng lớn tăng, trong khi đó tốc độ chuyển dời của đỉnh hấp thụ năng lượng bé giảm. Đồng thời, tốc độ chuyển dời của hai đỉnh hấp thụ này phụ thuộc đơn điệu vào độ lệch cộng hưởng.



Hình 7. Sự phụ thuộc của tốc độ chuyển dời vào độ lệch cộng hưởng của đỉnh hấp thụ năng lượng thấp (đường chấm chấm hình vuông), đỉnh hấp thụ năng lượng cao (đường liền nét hình tròn) và đỉnh ban đầu khi không có tác dụng của laser bơm (đường đứt nét) trong chấm lượng tử phòng cầu dạng dẹt khi tỉ số các bán trục $\chi = 0,1$

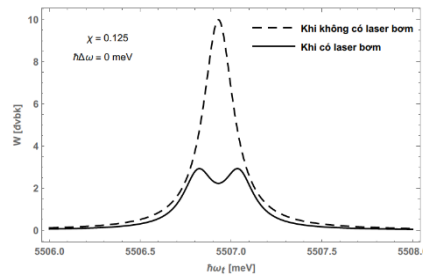
Tiếp theo, chúng tôi khảo sát sự ảnh hưởng của giá trị χ lên phổ hấp thụ của exciton. Hình 8 mô tả sự phụ thuộc của tốc độ chuyển dời vào năng lượng photon ứng với các giá trị khác nhau của tỉ số các bán trục $\chi = 0,1$ (đường chấm chấm), $\chi = 0,125$ (đường đứt nét), và $\chi = 0,2$ (đường liền nét) trong trường hợp có tác dụng của laser bơm với độ lệch cộng hưởng $\hbar\Delta\omega = 0,03$ meV. Trong cả ba trường hợp, chúng tôi quan sát thấy xuất hiện hai đỉnh hấp thụ exciton. Điều này một lần nữa khẳng định sự tồn tại của hiệu ứng Stark quang học của exciton trong cấu trúc này. Bên cạnh đó, khi tăng giá trị của χ thì cả hai đỉnh hấp thụ dịch chuyển nhanh về vùng năng lượng cao, tương ứng với một dịch chuyển xanh trong phổ hấp thụ quang. Do đó, việc thay đổi các tính chất quang của các cấu trúc chấm lượng tử phòng cầu dạng dẹt trở nên dễ điều khiển và linh hoạt hơn thông qua việc chỉ thay đổi hai tham số bán trục nhỏ và bán trục lớn tồn tại



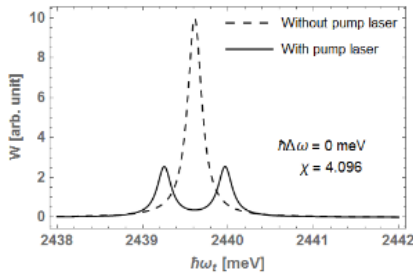
Hình 8. Sự phụ thuộc của tốc độ chuyển dời vào năng lượng photon ứng với các giá trị tỉ số các bán trục khác nhau $\chi = 0,1$ (hay $a = 100 \text{ \AA}$), $\chi = 0,125$ (hay $a = 100 \text{ \AA}$), và $\chi = 0,2$ (hay $a = 50 \text{ \AA}$) trong trường hợp có tác dụng của laser bơm với độ lệch cộng hưởng $\hbar\Delta\omega = 0,03 \text{ meV}$

trong cấu trúc chấm lượng tử này. Đây là một trong những ưu điểm của các cấu trúc chấm lượng tử hình phòng cầu so với các chấm lượng tử hình cầu.

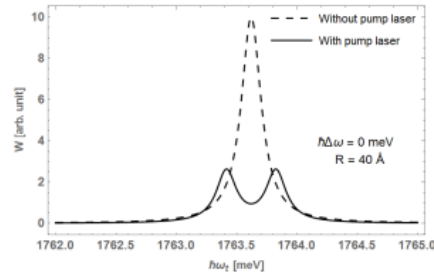
Cuối cùng, chúng tôi so sánh phổ hấp thụ của exciton trong chấm lượng tử phòng cầu dạng dẹt (Hình 9a) với chấm lượng tử hình ê-líp dạng thuôn (Hình 9b) [36] và chấm lượng tử hình cầu (Hình 9c) [35] với cùng một thể tích như nhau. Từ Hình 9, chúng tôi thấy rằng, với cùng một thể tích như nhau, phổ hấp thụ của exciton trong ba chấm lượng tử có hình dạng khác nhau là hoàn toàn khác nhau. Nói cách khác, hiệu ứng Stark quang học của exciton không những phụ thuộc vào độ lệch cộng hưởng, kích thước của chấm lượng tử mà còn phụ thuộc rất nhạy vào dạng hình học của chấm lượng tử.



a)



b) c)



Hình 9. Sự phụ thuộc của phổ hấp thụ của exciton vào năng lượng photon trong chấm lượng tử phòng cầu dạng dẹt với độ dài bán trục nhỏ $c = 10 \text{ \AA}$, $\chi = 0,125$ (a), chấm lượng tử hình ê-líp dạng thuôn có độ dài bán trục nhỏ $a = 25 \text{ \AA}$, $\chi = 4,096$ (b) [36] và chấm lượng tử hình cầu có bán kính $R = 40 \text{ \AA}$ với cùng thể tích (c) [35]

4 Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã áp dụng lý thuyết hàm sóng tái chuẩn hóa để nghiên cứu chi tiết hiệu ứng Stark quang học của exciton trong

chấm lượng tử phòng cầu dạng dẹt InGaAs/InAlAs. Kết quả đã chỉ ra rằng, sau khi sóng bơm bắt đầu hoạt động thì trong phổ hấp thụ của exciton xuất hiện hai đỉnh phổ phân biệt, chứng tỏ đã xảy ra hiệu ứng Stark quang học của

exciton trong cấu trúc chấm lượng tử này. Bên cạnh đó, phổ hấp thụ của exciton cũng phụ thuộc rất mạnh vào độ lệch cộng hưởng và kích thước của chấm lượng tử, đặc biệt là phụ thuộc rất nhạy vào dạng hình học của chấm lượng tử. Cụ thể, khi tăng độ lệch cộng hưởng thì đỉnh hấp thụ năng lượng cao có xu hướng tiến về vị trí đỉnh hấp thụ ban đầu (lúc sóng bom chưa bật lên), còn đỉnh hấp thụ năng lượng thấp rời xa vị trí đỉnh ban đầu. Càng giảm độ dài bán trục lớn thì phổ hấp thụ càng dịch về vùng năng lượng cao, thể hiện hiệu ứng giam giữ lượng tử trong cấu trúc chấm lượng tử này. Với cùng một thể tích như nhau thì phổ hấp thụ của exciton trong các chấm lượng tử có hình dạng khác nhau là hoàn toàn khác nhau. Ngoài ra, tốc độ chuyển dời của đỉnh hấp thụ năng lượng cao và đỉnh hấp thụ năng lượng thấp cũng phụ thuộc rất mạnh vào độ lệch cộng hưởng của sóng bom. Chúng tôi hy vọng các kết quả này sẽ có những đóng góp quan trọng vào việc nghiên cứu và ứng dụng hiệu ứng Stark quang học của exciton trong tương lai.

Thông tin tài trợ

Nghiên cứu này được Bộ Giáo dục và Đào tạo tài trợ trong Đề tài Khoa học và Công nghệ mã số B-2020-DHH-06.

Tài liệu tham khảo

1. Kumar KM, Peter AJ, Lee CW. Optical absorption and refraction index change of a confined exciton in a spherical quantum dot nanostructure. *The European Physical Journal B*. 2011;84:431-438.
2. Gambhir M, Prasad V. Study of non-linear optical properties of center and edge δ -doped multiple quantum wells. *Revista Mexicana de Física*. 2018;64:439-446.
3. Sarkisyan HA, Hayrapetyan DB, Petrosyan LS, Kazaryan EM, Sofronov AN, Balagula RM, et al. Realization of the Kohn's Theorem in Ge/Si Quantum Dots with Hole Gas: Theory and Experiment. *Nanomaterials*. 2019;9:1-24.
4. Özbakir R. Linear and Nonlinear Intersubband Optical Absorptions In Multiple Quantum Wells Under The External Fields. *Cumhuriyet Science Journal*. 2019;40:640-649.
5. Aghoutane N, E-Yadri M, Aouami AE, Feddi EM, Dujardin F, Haouari ME. Optical Absorption of Excitons in Strained Quasi 2D GaN Quantum Dot. *Physica Status Solidi (B)*. 2019;256:1800361(1-6).
6. Liu J, Nie Y, Xue W, Wu L, Jin H, Jin G, Zhai Z, and Fu C. Size effects on structural and optical properties of tin oxide quantum dots with enhanced quantum confinement. *Journal of Materials Research and Technology*. 2020;9:8020-8028.
7. Solaimani M, and Kenari AR. A nonparabolic conduction band study of circular quantum dot optical properties: modeling of surface roughness by using Koch snowflakes. *Journal of Nanoparticle Research*. 2020;22:242(1-10).
8. Harutyunyan VA, Kazaryan EM, Kostanyan AA, Sarkisyan HA. Interband transitions in cylindrical layer quantum dot: Influence of magnetic and electric fields. *Physica E*. 2007;36:114-118.
9. Liu C-H, Xu B-R. Theoretical study of the optical absorption and refraction index change in a cylindrical quantum dot. *Physics Letters A*. 2008;372:888-892.
10. He L, Xie W. Effects of an electric field on the confined hydrogen impurity states in a spherical parabolic quantum dot. *Superlattices and Microstructures*. 2010;47:266-273.
11. Hayrapetyan DB, Kazaryan EM, Kotanjyan TV, Tevosyan HKh. Exciton states and interband absorption of cylindrical quantum dot with Morse confining potential. *Superlattices and Microstructures*. 2015;78:40-49.
12. Liang L, Xie W. Influence of the shape of quantum dots on their optical absorptions. *Physica B*. 2015;462:15-17.
13. Cantele G, Ninno D, Iadonisi G. Confined states in ellipsoidal quantum dots. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2000;12:9019-9036.
14. Cantele G, Piacente G, Ninno D, Iadonisi G. Optical anisotropy of ellipsoidal quantum dots. *Physical Review B*. 2002;66:113308(1-4).
15. Boichuk VI, Hol'skyi VB, Kubay RYu, Lukin RI. The electron energy spectrum in an ellipsoidal quantum dot with regard for finite band gap at the interface. *Ukrainian Journal of Physics*. 2008;53:574-578.

16. Combescot M, and Combescot R. Optical Stark effect of the exciton: Biexcitonic origin of the shift. *Physical Review B*. 1989;40:3788-3801.
17. Gadzhiyev IM, Buyalo MS, Gubenko AE, Egorov AY, Usikova AA, Il'inskaya ND, et al. Switching between the Mode-Locking and Q-Switching Modes in Two-Section QW Lasers upon a Change in the Absorber Properties due to the Stark Effect. *Semiconductor*. 2016;50:828-831.
18. Rong Y, Huo Y, Fei ET, Fiorentino M, Tan MRT, Ochalski T, et al. High Speed Optical Modulation In Ge Quantum Wells Using Quantum Confined Stark Effect. *Frontiers of Optoelectronics*. 2012;5:82-89.
19. Quang NH. The optical Stark effect of the exciton due to dynamical coupling between quantized states of the electron and hole in quantum wells. *International Journal of Modern Physics B*. 1993; 7:3405-3413.
20. Z-Raczyńska S, Czajkowski G, Ziemkiewicz D. Quantum confined stark effect in wide parabolic quantum wells: real density matrix approach. *The European Physical Journal B*. 2015;88:338(1-8).
21. Sheng W, Yun K, Chunjie H. Transverse Stark effect in the optical absorption in a square semiconducting quantum wire. *Journal of Semiconductors*. 2013; 34:102001(1-7).
22. Rustagi A, Kemper AF. Coherent excitonic quantum beats in time-resolved photoemission measurements. *Physical Review B*. 2019; 99:125303(1-7).
23. Sangalli D, Perfetto E, Stefanucci G, Marini A. An ab-initio approach to describe coherent and non-coherent exciton dynamics. *The European Physical Journal B*. 2018;91:171(1-12).
24. Song D, Wang F, Dukovic G, Zheng M, Semke ED, Brus LE, et al. Measurement of the optical Stark effect in semiconducting carbon nanotubes. *Applied Physics A*. 2009;96:283-287.
25. Efumi S, Uchibori Y, Ishihara J, Miyajima K. Observation of optical Stark effect between $1s - 2p$ exciton levels in CuCl single crystal. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019;1220:012022(1-4).
26. Ahn D. Enhancement of the Stark Effect in Coupled Quantum Wells for Optical Switching Devices. *IEEE Journal of Quantum Electronics*. 1989;25:2260-2265.
27. Liu JT, Su FH, Wang H, Deng XH. The influence of the optical Stark effect on chiral tunneling in graphene. *Europhysics Letters*. 2011;95:24003p1-24003p5.
28. Iadonisi G, Cantele G, Ramaglia VM, Ninno D. Electronic and optical properties of semiconductor nanostructures. *Physica Status Solidi (b)*. 2003; 237:320-340.
29. <https://en.wikipedia.org/wiki/Spheroid>. Ngày truy cập: 22 tháng 7 năm 2021.
30. Bányai L, Koch SW. *Semiconductor Quantum Dots* (World Scientific, Singapore) 1st ed. 1993. Chap. 1, a) p. 5; b) pp. 11-15; c) p. 117.
31. Jorio A, Saito R, Dresselhaus G, Dresselhaus MS. *Raman Spectroscopy in Graphene Related Systems* (Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim). 2011; Part 1, Chap. 5, Sec. 5.4.1, 2011.
32. V. Balakrishnan. All about the dirac delta function (?). *Resonance*. 2003;8:48-58.
33. Asai H, Kawamura Y. Intersubband absorption in $\text{In}_{0.53}\text{Ga}_{0.47}\text{As}/\text{In}_{0.52}\text{Al}_{0.48}\text{As}$ multiple quantum wells. *Physical Review B*. 1991;43:4748-4759.
34. Cao S, Zhao Y, Feng S, Zuo Y, Zhang L, Cheng B, et al. Theoretical Analysis of InGaAs/InAlAs Single-Photon Avalanche Photodiodes. *Nanoscale Research Letters*. 2019;14:1-8.
35. Thao DN, Bao LTN, Phuoc DD, Quang NH. A theoretical study of the optical Stark effect in InGaAs/InAlAs quantum dots. *Semiconductor Science and Technology*. 2017;32:025014-1.
36. Bao LTN, Phuoc DD, Hien LTD, Thao DN. On the optical Stark effect of excitons in InGaAs prolate ellipsoidal quantum dots. *Journal of Nanomaterials*. 2021;5586622:1-12.