

CÁC TÍNH CHẤT ĐỘNG LƯỢNG TỬ CỦA TRẠNG THÁI KẾT HỢP BỘ BA THÊM PHOTON TRONG MÔ HÌNH JAYNES-CUMMINGS HAI MODE

Lê Thị Hồng Thanh^{1,2}, Trương Minh Đức^{1*}

¹ Trung tâm Vật lý lý thuyết và Vật lý Tính toán, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế, 34 Lê Lợi, Huế, Việt Nam

² Khoa Khoa học Tự nhiên & Kỹ thuật, Trường Đại học Quảng Nam, 102 Hùng Vương, Tp. Tam Kỳ, Quảng Nam, Việt Nam

* Tác giả liên hệ Trương Minh Đức <tmduc@hueuni.edu.vn>

(Ngày nhận bài: 15-05-2022; Ngày chấp nhận đăng: 04-07-2022)

Tóm tắt. Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu các tính chất động lượng tử thông qua mô hình Jaynes-Cummings (JC) hai mode, trong đó một nguyên tử hai mức hiệu dụng tương tác với trường ở trạng thái kết hợp bộ ba thêm photon (PATCS). Các tính chất động lượng tử của nguyên tử và trường ở PATCS đã được khảo sát thông qua các hàm phân bố photon, các hàm tương quan bậc hai cùng mode và khác mode và hàm xác suất tìm nguyên tử ở trạng thái kích thích trong hốc cộng hưởng. Các kết quả khảo sát đã chỉ ra các tính chất động của nguyên tử và tính phi cổ điển của trường ở PATCS. Ngoài các yếu tố ảnh hưởng đến các tính chất động trên như cường độ trường ban đầu thì vai trò của việc thêm photon vào các mode của trường ở PATCS là rất quan trọng khi so sánh với trường ở trạng thái gốc ban đầu là trạng thái kết hợp bộ ba.

Từ khóa: trạng thái kết hợp bộ ba, trạng thái kết hợp bộ ba thêm photon, mô hình Jaynes-Cummings hai mode, tính chất động lượng tử

Quantum dynamic properties of photon-added trio coherent state in two-mode Jaynes-Cummings model

Le Thi Hong Thanh^{1,2}, Trương Minh Đức^{1*}

¹ Center for Theoretical and Computational Physics, University of Education, Hue University, 34 Le Loi St., Hue, Vietnam

² Quang Nam University, 102 Hung Vuong St., Tam Ky City, Quang Nam, Vietnam

* Correspondence to Trương Minh Đức <tmduc@hueuni.edu.vn>

(Received: 15 May 2022; Accepted: 04 July 2022)

Abstract. In this paper, we studied the quantum dynamic properties via the two-mode Jaynes-Cummings (JC) model where an effective two-level atom interacts with a field in a photon-added trio coherent state (PATCS). The quantum dynamic properties of the atom and the field were investigated via the photon distribution function, the second-order correlation function of the same and different modes, and the probability of finding the atom in the excited state in the cavity. The results show the dynamic properties of the atom and the non-classical ones of the field in the PATCS. In addition to the factors that affect these dynamic properties, such as the original field strength, the role of adding photons

to the modes of the field in the PATCS is important when compared with the field in the original state as the trio coherent state.

Keywords: trio coherent state, photon-added trio coherent state, two-mode Jaynes-Cummings model, quantum dynamic properties

1 Mở đầu

Trong vài thập kỷ gần đây, thông tin lượng tử và máy tính lượng tử là các lĩnh vực mới đang được quan tâm nghiên cứu ở trong nước cũng như trên thế giới về cả lý thuyết lẫn thực nghiệm. Những ứng dụng đáng mong đợi trong các lĩnh vực này như rối lượng tử [1], mật mã lượng tử [2], sửa lỗi lượng tử [3], phân bố khóa lượng tử [4], viễn tải lượng tử [5], đồng viễn tạo trạng thái [6] và nhiều ứng dụng khác [7] đã và đang được các nhà khoa học nghiên cứu và công bố.

Các trạng thái phi cổ điển đơn và đa mode đã được đề xuất và tạo ra ngày càng nhiều, như trạng thái chân không nén đơn mode [8], trạng thái chân không nén hai mode [9], trạng thái kết hợp cặp [10], trạng thái kết hợp bộ ba (TCS) [11] với các tính chất phi cổ điển đáng mong đợi như tính chất nén, tính chất phản kết chùm và tính chất đan rối [12-14]. Để tăng cường các tính chất này, đã có nhiều phương pháp được đề xuất, trong đó phương pháp thêm và bớt photon vào các trạng thái ban đầu đã cho thấy sự cải thiện đáng kể trong việc tăng cường các tính chất phi cổ điển nói trên. Một loạt các trạng thái phi cổ điển được tạo ra bằng việc thêm và (hoặc) bớt photon như trạng thái nén chân không hai mode thêm nhiều photon [15], trạng thái kết hợp cặp thêm photon tổng quát [16], trạng thái kết hợp cặp thêm và bớt photon hai mode [17] và trạng thái kết hợp bộ ba thêm photon [18]. Trong các trạng thái phi cổ điển này, các tác giả đã tập trung nghiên cứu các tính chất phi cổ điển như tính chất nén tổng, tính chất nén hiệu, tính chất phản kết chùm bậc cao và tính chất đan rối trong các trạng thái dừng [19]. Tuy nhiên, khi nguyên tử tương tác với trường ở các trạng thái phi cổ điển, các tính chất phi cổ điển trên thay đổi theo

thời gian. Vấn đề này cũng cần được quan tâm nghiên cứu.

Jaynes-Cummings (JC) đã đề xuất mô hình tương tác giữa nguyên tử và trường để nghiên cứu các quá trình động và đã được thực nghiệm kiểm chứng [20]. Các hiện tượng động lượng tử đã được quan sát và chỉ ra trong các mô hình JC cơ bản, trong đó một nguyên tử hai mức tương tác với trường điện từ đơn mode cho đến các mô hình JC mở rộng, chẳng hạn như dao động Rabi, sự suy giảm và hồi phục theo chu kỳ [21], tính chất nén [22], tính chất phản kết chùm của photon [23] và tính đan rối nguyên tử – trường [1]. Trong các mô hình JC mở rộng, nhiều nghiên cứu đã tập trung vào mô hình tương tác giữa một nguyên tử hai mức hiệu dụng với trường hai mode [23, 24]. Đây là các quá trình hai photon mà nguyên tử hấp thụ hoặc phát xạ đồng thời. Khi mở rộng cho các trường ba mode, các nghiên cứu chỉ ra rằng các trạng thái này có các tính chất phi cổ điển đặc biệt cùng với tính chất đan rối ba mode sẽ dẫn đến những kỳ vọng trong việc áp dụng chúng vào các hệ lượng tử đa thành phần [25, 26].

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu các tính chất động lượng tử của nguyên tử và trường ở trạng thái kết hợp bộ ba thêm photon (PATCS) trong mô hình JC hai mode. Trong mục 2, chúng tôi giới thiệu mô hình JC hai mode gồm một nguyên tử hai mức hiệu dụng tương tác với trường ở PATCS. Mục 3 trình bày về toán tử mật độ theo thời gian, các kết quả tính toán cho hàm phân bố xác suất tìm nguyên tử ở trạng thái kích thích, hàm phân bố số photon theo thời gian và các hàm tương quan bậc hai cùng mode và khác mode theo thời gian. Các kết quả này được dùng để thảo luận về các tính chất động học của nguyên tử theo thời gian

ở mục 4 và các tính chất động lượng tử của trường PATCS ở mục 5. Cuối cùng các kết quả chính được chúng tôi kết luận trong mục 6.

2 Mô hình Jaynes–Cumming hai mode

Trạng thái kết hợp bộ ba của trường boson ba mode a, b, c được xác định theo biểu thức [11]

$$|\xi, p, q\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\xi) |n_a, n_b, n_c\rangle, \quad (1)$$

trong đó $|n_a, n_b, n_c\rangle = |n+p+q\rangle_a |n+q\rangle_b |n\rangle_c$ là biểu diễn theo các trạng thái số hạt trong không gian Fock của ba mode a, b, c với p và q là các số nguyên không âm; $C_n(\xi) = N_{p,q}(r) \xi^n (n_a! n_b! n_c!)^{-1/2}$ là hệ số khai triển với $N_{p,q}^{-2}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} (n_a! n_b! n_c!)^{-1}$. Tham số r và ξ liên hệ với nhau qua biểu thức $\xi = r e^{i\phi}$, với r và ϕ là các số thực.

Trạng thái kết hợp bộ ba thêm photon đã được đề xuất bởi [18] có dạng như sau

$$|\xi, p, q, h, k, l\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,h,k,l}(\xi) |n_a + h, n_b + k, n_c + l\rangle, \quad (2)$$

trong đó $C_{n,h,k,l}(\xi)$ là hệ số khai triển có dạng

$$C_{n,h,k,l}(\xi) = N_{p,q,h,k,l}(r) C_n(\xi) \times \frac{\sqrt{(n_a + h)!(n_b + k)!(n_c + l)!}}{\sqrt{n_a! n_b! n_c!}}, \quad (3)$$

với

$$N_{p,q,h,k,l}^{-2}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n^2(r) (n_a + h)!(n_b + k)!(n_c + l)!}{n_a! n_b! n_c!}. \quad (4)$$

Từ (1) và (2) dễ dàng suy ra khi $h = k = l = 0$ thì PATCS trở thành TCS. Từ (2), xác suất tìm $(n_a + h)$ photon ở mode a , $(n_b + k)$ photon ở mode b và $(n_c + l)$ photon ở mode c tại thời điểm $t = 0$ là

$$P_n(0) = \left| \langle n_c + l, n_b + k, n_a + h | \xi, p, q, h, k, l \rangle \right|^2 = |C_{n,h,k,l}(\xi)|^2, \quad (5)$$

với $C_{n,h,k,l}(\xi)$ đã cho ở (3).

Trong bài báo này, chúng tôi khảo sát mô hình gồm một nguyên tử hai mức hiệu dụng tương tác với trường ở PATCS. Nguyên tử có hai mức cơ bản và kích thích được ký hiệu bằng hai vectơ $|g\rangle$ và $|e\rangle$ ứng với các mức năng lượng ω_g và ω_e (xét trong hệ đơn vị $\hbar = 1$). Giữa hai mức $|e\rangle$ và $|g\rangle$, nguyên tử có một mức trung gian $|i\rangle$, có năng lượng ω_i mà năng lượng của ba mức $|i\rangle$, $|e\rangle$ và $|g\rangle$ là khác nhau. Dịch chuyển giữa các mức $|g\rangle$, $|i\rangle$ và giữa $|i\rangle$, $|e\rangle$ là được phép, trong khi dịch chuyển giữa $|g\rangle$ và $|e\rangle$ là bị cấm.

Trạng thái kết hợp bộ ba thêm photon ứng với ba mode $j = \{1, 2, 3\}$ có các mức năng lượng Ω_j khác nhau thỏa mãn điều kiện $\omega_i - \omega_g = \Omega_1 - \Delta$, $\omega_e - \omega_i = \Omega_2 + \Delta$, với độ điều hưởng $\Delta \neq 0$ là độ điều hưởng cho quá trình hấp thụ một photon. Khi nguyên tử chuyển mức năng lượng giữa hai mức $|e\rangle$ và $|g\rangle$ thì nó hấp thụ cùng lúc hai photon mode a và mode b . Với một cấu hình như vậy thì các dịch chuyển một photon giữa $|g\rangle$ và $|i\rangle$ và giữa $|i\rangle$ và $|e\rangle$ mặc dù là được phép nhưng không khả thi vì vi phạm sự bảo toàn năng lượng. Tuy nhiên, dịch chuyển giữa $|g\rangle$ và $|e\rangle$ mặc dù bị cấm nhưng có thể bằng các quá trình hai photon. Nghĩa là bằng cách hấp thụ đồng thời một photon từ mode a và một photon khác từ mode b thì nguyên tử nhảy từ mức $|g\rangle$ lên mức $|e\rangle$. Tương tự, nó nhảy từ mức $|e\rangle$ xuống mức $|g\rangle$ bằng cách phát xạ hai photon cùng lúc.

Hamiltonian toàn phần mô tả mô hình Jaynes-Cummings hai mode của hệ nguyên tử-

trường trong phép gần đúng sóng quay và bỏ qua hiệu ứng Stark có dạng [26]

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^2 \Omega_j \hat{a}_j^+ \hat{a}_j + \frac{\omega}{2} (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) + \lambda (|e\rangle\langle g| \hat{a}_1 \hat{a}_2 + \hat{a}_1^+ \hat{a}_2^+ |g\rangle\langle e|), \quad (6)$$

trong đó $\omega = \omega_e - \omega_g = \Omega_1 + \Omega_2$ là tần số dao động của nguyên tử; \hat{a}_j (\hat{a}_j^+) là các toán tử hủy (sinh) photon mode j ; λ là hằng số tương tác giữa nguyên tử và trường.

Vì nguyên tử hấp thụ và phát xạ một cặp photon cùng lúc trong hốc lý tưởng, chúng tôi chọn hệ vectơ cơ sở trong biểu diễn “trạng thái mặc áo” có dạng $|e, n_a + h, n_b + k, n_c + l\rangle$ và $|g, n_a + h + 1, n_b + k + 1, n_c + l\rangle$. Hàm riêng và trị riêng tương ứng của toán tử \hat{H} được xác định cụ thể như sau

$$|\Psi_n^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |e, n_a + h, n_b + k, n_c + l\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}} |g, n_a + h + 1, n_b + k + 1, n_c + l\rangle, \quad (7)$$

$$\lambda_n^\pm = A_n \pm Q_n, \quad (8)$$

trong đó

$$A_n = \Omega_1 (n_a + h) + \Omega_2 (n_b + k) + \frac{1}{2} \omega, \quad (9)$$

$$Q_n = \lambda \sqrt{(n_a + h + 1)(n_b + k + 1)}.$$

3 Toán tử mật độ theo thời gian

Để mô tả sự tiến triển của hệ nguyên tử – trường theo thời gian, chúng tôi sử dụng toán tử mật độ của hệ $\hat{\rho}(t)$, được định nghĩa như sau [23]

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(n, t) \hat{\rho}(0) \hat{U}^\dagger(n, t), \quad (10)$$

trong đó $\hat{U}(n, t) = e^{-i\hat{H}t}$ là toán tử unita tiến hóa theo thời gian và $\hat{\rho}(0)$ là toán tử mật độ của hệ tại thời điểm ban đầu. Nếu xem nguyên tử ban đầu ở

trạng thái tổ hợp $|A\rangle = \mu_e |e\rangle + \mu_g |g\rangle$, $|\mu_e|^2 + |\mu_g|^2 = 1$ và trường ở trạng thái kết hợp bộ ba thêm photon $|F\rangle = |\xi, p, q; h, k, l\rangle$, thì $\hat{\rho}(0)$ được kết hợp từ hai thành phần của nguyên tử và trường như sau

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_A(0) \otimes \hat{\rho}_F(0) = |A\rangle\langle A| \otimes |F\rangle\langle F| = \begin{pmatrix} \hat{\rho}_{ee}(0) & \hat{\rho}_{eg}(0) \\ \hat{\rho}_{ge}(0) & \hat{\rho}_{gg}(0) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

trong đó các yếu tố ma trận tại thời điểm ban đầu có dạng

$$\hat{\rho}_{js}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \mu_j \mu_s^* C_{n;h,k,l} C_{m;h,k,l}^* \times |j, n_a + h, n_b + k, n_c + l\rangle\langle m_c + l, m_b + k, m_c + h, s|, \quad (12)$$

với $j, s = \{e, g\}$, $j \neq s$.

Áp dụng biểu thức toán tử \hat{H} ở (6), chúng tôi thu được dạng của toán tử unita tiến hóa theo thời gian

$$\hat{U}(n, t) = e^{-i\hat{H}t} = \begin{pmatrix} U_{ee}(n, t) & U_{eg}(n, t) \\ U_{ge}(n, t) & U_{gg}(n, t) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

trong đó các yếu tố ma trận được xác định như sau

$$U_{ee}(n, t) = U_{gg}(n, t) = \frac{1}{2} (e^{-i\lambda_n^+ t} + e^{-i\lambda_n^- t}), \quad (14)$$

$$U_{eg}(n, t) = U_{ge}(n, t) = \frac{1}{2} (e^{-i\lambda_n^+ t} - e^{-i\lambda_n^- t}).$$

Biểu thức tường minh của toán tử ma trận mật độ của hệ theo thời gian $\hat{\rho}(t)$ thu được khi thay (11)–(14) vào (10). Từ đó, giá trị kỳ vọng của một toán tử $\hat{O}(t)$ bất kỳ liên hệ với $\hat{\rho}(t)$ thông qua công thức

$$\langle \hat{O}(t) \rangle = \text{Tr} [\hat{\rho}(t) \hat{O}(0)]. \quad (15)$$

Đồng thời, để đưa ra biểu thức giải tích mô tả các tính chất động lượng tử của nguyên tử và trường trong mô hình JC, chúng tôi sử dụng toán tử mật độ nguyên tử rút gọn $\hat{\rho}^A(t)$ và toán tử mật độ trường rút gọn $\hat{\rho}^F(t)$ bằng cách lấy vết của $\hat{\rho}(t)$ theo các trạng thái của trường và theo các

trạng thái nguyên tử một cách tương ứng với các yếu tố ma trận được xác định theo [23]

$$\rho_{js}^A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle j, n_{a,b,c;h,k,l} | \hat{\rho}(t) | s, n_{a,b,c;h,k,l} \rangle, \quad (16)$$

$$\rho_{nm}^F(t) = \sum_{j \in \{e,g\}} \langle j, n_{a,b,c;h,k,l} | \hat{\rho}(t) | j, m_{a,b,c;h,k,l} \rangle, \quad (17)$$

trong đó $|n_{a,b,c;h,k,l}\rangle = |n_a+h, n_b+k, n_c+l\rangle$.

Để đơn giản trong quá trình tính số và thảo luận, chúng tôi xét nguyên tử ban đầu ở trạng thái kích thích. Áp dụng (10)–(14) vào (16) và (17), chúng tôi thu được các kết quả cho các yếu tố ma trận của toán tử mật độ rút gọn của nguyên tử và trường cụ thể như sau

$$\begin{aligned} \rho_{ee}^A(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle e, n_{a,b,c;h,k,l} | \hat{\rho}(t) | n_{a,b,c;h,k,l}, e \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0) \text{Cos}^2(Q_n t), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \rho_{mm}^F(t) &= \langle e, n_{a,b,c;h,k,l} | \hat{\rho}(t) | e, n_{a,b,c;h,k,l} \rangle \\ &+ \langle g, n_{a,b,c;h,k,l} | \hat{\rho}(t) | g, n_{a,b,c;h,k,l} \rangle \\ &= P_n(0) \text{Cos}^2(Q_n t) + P_{n-1}(0) \text{Sin}^2(Q_{n-1} t), \end{aligned} \quad (19)$$

trong đó $P_n(0)$ và $Q_n(t)$ được cho ở (5) và (9).

4 Các tính chất động học của nguyên tử theo thời gian

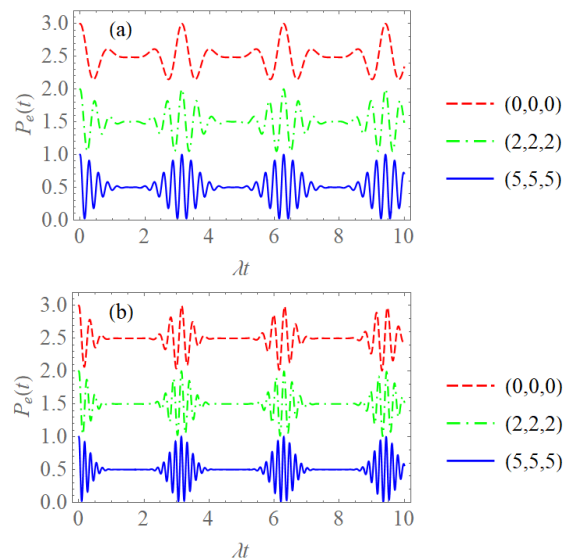
Các tính chất động học của nguyên tử theo thời gian được mô tả thông qua xác suất tìm nguyên tử ở trạng thái kích thích $P_e(t)$; đó chính là các yếu tố ma trận trên đường chéo của toán tử mật độ nguyên tử rút gọn $\hat{\rho}^A(t)$ và có dạng cụ thể như sau

$$P_e(t) = \rho_{ee}^A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0) \text{Cos}^2(Q_n t), \quad (20)$$

với $P_n(0)$ và $Q_n(t)$ được cho ở (5) và (9). Kết quả giải tích ở (20) chỉ ra khi các tham số được chọn thỏa mãn điều kiện $p = q = 0$ và $h = k = l$ thì $P_e(t)$ dao động với chu kỳ $\pi/\lambda(n+h+1)$; đây còn được gọi là dao động Rabi của nguyên tử. Do đó, để các đồ thị được rõ ràng, chúng tôi thường chọn các tham số

ứng với $h = k = l$ và khảo sát hai trường hợp $p = q = 0, p = q \neq 0$ cho trường ở TCS và PATCS trong các hình vẽ bên dưới. Điều này cũng phù hợp với các kết quả đã được công bố trong các tài liệu [26, 27].

Hình 1 là đồ thị của hàm $P_e(t)$ theo thời gian. Đường nét gạch đỏ dành cho trường ở TCS ứng với $(h,k,l) = (0,0,0)$; hai đường còn lại dành cho trường ở PATCS trong đó đường nét gạch chấm xanh lá $(h,k,l) = (2,2,2)$; đường liền nét xanh đậm $(h,k,l) = (5,5,5)$ trên Hình 1a khảo sát cho trường hợp $p = q = 0, r = 5$ và Hình 1b cho trường hợp $p = q = 2, r = 20$. Đồ thị trên Hình 1 cho thấy trong cả hai trường hợp TCS và PATCS, sự hồi phục diễn ra đều đặn theo chu kỳ hay $P_e(t)$ dao động với cùng chu kỳ hồi phục và có giá trị trong khoảng $(0,1)$, nhưng bề rộng của khoảng hồi phục trong trường hợp PATCS lớn hơn TCS do bản chất của phân bố Sub-Poisson. Ngoài ra, khi tăng r , số dao động trong mỗi chu kỳ đều tăng lên (Hình 1b). Bên cạnh đó, khi số photon thêm vào ba mode của trường tăng lên thì số dao động trong mỗi chu kỳ hồi phục cũng tăng lên nhanh. Khi $p = q = 0$ (Hình 1a), sự dao động trong mỗi chu kỳ có tính chất đối xứng, nhưng điều này không còn đúng khi $p = q \neq 0$ (Hình 1b, đường nét



Hình 1. Đồ thị sự phụ thuộc của $P_e(t)$ theo λt với các tham số (a) $p = q = 0, r = 5$; (b) $p = q = 2, r = 20$ và bộ (h,k,l) tương ứng với đường nét gạch đỏ $[P_e(t)+2]$ là $(0,0,0)$, đường nét gạch chấm xanh lá $[P_e(t)+1]$ là $(2,2,2)$, đường liền nét xanh đậm $P_e(t)$ là $(5,5,5)$

gạch đỏ). Khi số photon thêm vào ba mode của trường ở PATCS càng tăng thì sự đối xứng trong mỗi chu kỳ hồi phục được cải thiện rõ rệt. Điều này cho thấy xác suất tìm nguyên tử ở trạng thái kích thích $P_e(t)$ không chỉ phụ thuộc vào cường độ trường ban đầu qua tham số r , mà còn phụ thuộc vào số photon được thêm vào các mode cho trường ở PATCS.

5 Các tính chất động lượng tử của trường PATCS

Các tính chất động lượng tử của trường ở PATCS được khảo sát thông qua các hàm phân bố photon theo thời gian $P_n(t)$, hàm tương quan bậc hai cùng mode $g_{ii}^{(2)}(t)$ và hàm tương quan bậc hai khác mode theo thời gian $g_{12}^{(2)}(t)$. Hàm phân bố photon theo thời gian $P_n(t)$ cũng chính là các yếu tố ma trận trên đường chéo của toán tử mật độ trường rút gọn $\hat{\rho}^F(t)$. Dựa vào (19), chúng tôi thu được biểu thức tường minh của $P_n(t)$ cụ thể như sau

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \rho_m^F(t) \\ &= P_n(0)\text{Cos}^2(Q_n t) + P_{n-1}(0)\text{Sin}^2(Q_{n-1}t), \end{aligned} \quad (21)$$

với $P_n(0)$ và $Q_n(t)$ cho ở (5) và (9).

Hàm tương quan bậc hai cùng mode phụ thuộc thời gian có dạng [28]

$$\begin{aligned} g_{ii}^{(2)}(t) &= \frac{\langle \hat{a}_i^{+2}(t)\hat{a}_i^2(t) \rangle - \langle \hat{a}_i^+(t)\hat{a}_i(t) \rangle^2}{\langle \hat{a}_i^+(t)\hat{a}_i(t) \rangle^2} \\ &= \frac{\langle (\Delta\hat{n}_i(t))^2 \rangle - \langle \hat{n}_i(t) \rangle^2}{\langle \hat{n}_i(t) \rangle^2}, \end{aligned} \quad (22)$$

trong đó $i = \{1,2\}$, đặc trưng cho mode a và mode b của trường PATCS; $\hat{n}_i(t) = \hat{a}_i^+(t)\hat{a}_i(t)$ là toán tử số photon của mode i và $\langle (\Delta\hat{n}_i(t))^2 \rangle = \langle \hat{n}_i^2(t) \rangle - \langle \hat{n}_i(t) \rangle^2$ là phương sai của toán tử số photon theo thời gian. Khi phương sai của toán tử số photon bé hơn trị trung bình của nó thì $g_{ii}^{(2)}(t) < 0$. Hàm $g_{ii}^{(2)}(t)$ theo thời gian cho biết tính chất photon của mode i , khi

thỏa mãn điều kiện $g_{ii}^{(2)}(t) < 0$, chúng ta nói rằng photon có tính phản kết chùm và ngược lại. Tính chất phản kết chùm của photon là điều đáng mong đợi trong các hệ lượng tử do ứng dụng tạo ra các nguồn đơn photon của chúng [29].

Hàm tương quan bậc hai khác mode theo thời gian $g_{12}^{(2)}(t)$ có dạng [28]

$$g_{12}^{(2)}(t) = \frac{\langle \hat{n}_1(t)\hat{n}_2(t) \rangle - \langle \hat{n}_1(t) \rangle \langle \hat{n}_2(t) \rangle}{\langle \hat{n}_1(t) \rangle \langle \hat{n}_2(t) \rangle}. \quad (23)$$

Nếu $g_{12}^{(2)}(t)$ là đại lượng dương thì các photon mode a và mode b tương quan với nhau; trong khi nếu $g_{12}^{(2)}(t)$ là âm thì các photon mode a và mode b không tương quan với nhau.

Áp dụng (10) và (15), chúng tôi thu được các kết quả trị trung bình và trị trung bình bình phương của toán tử số photon mode i như sau

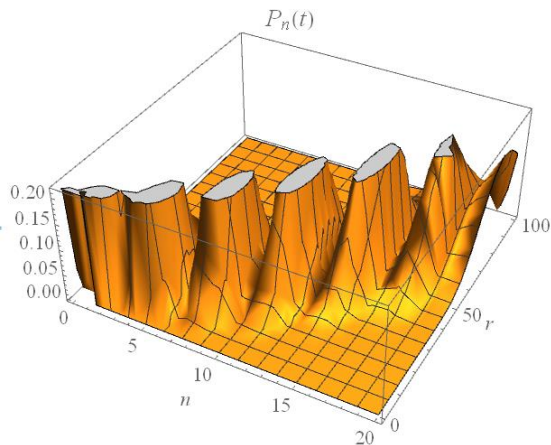
$$\langle \hat{n}_i(t) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)n_i + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)\text{Sin}^2(Q_n t), \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}_1(t)\hat{n}_2(t) \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)(n_1 + n_2 + 1)\text{Sin}^2(Q_n t) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)n_1n_2, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\langle \hat{n}_i^2(t) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)(2n_i + 1)\text{Sin}^2(Q_n t) + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(0)n_i^2, \quad (26)$$

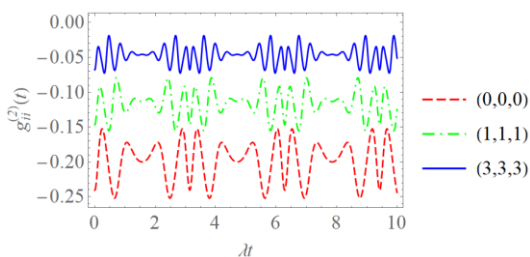
với $P_n(0)$ và $Q_n(t)$ cho ở (5) và (9).

Hình 2 là đồ thị về sự phụ thuộc của $P_n(t)$ theo số photon n trong mỗi mode và cường độ trường ban đầu r tại thời điểm $t \neq 0$. Đồ thị cho thấy hàm phân bố photon dao động tuần hoàn với các giá trị $0 < n < 20$ và $0 < r < 100$. Dựa vào đồ thị này, chúng tôi chọn các tham số n và r tương ứng sao cho $P_n(t)$ đạt giá trị cực đại để khảo sát tính chất của trường ở PATCS theo thời gian cũng như so sánh với trường ở TCS trong các đồ thị từ Hình 2 đến Hình 6. Trong các đồ thị này, chúng tôi thống nhất biểu thị đường nét gạch đỏ ứng với trường ở TCS, các đường xanh lá nét gạch chấm và xanh đậm nét liền ứng với trường ở PATCS.



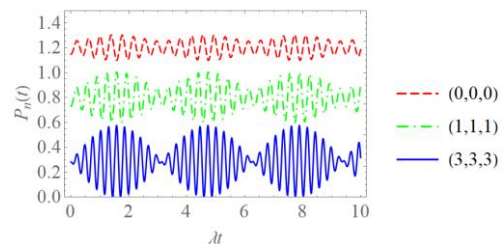
Hình 2. Đồ thị sự phụ thuộc của $P_n(t)$ theo n, r khi $p = q = 0$

Hình 3 là đồ thị sự phụ thuộc của $P_n(t)$ theo λt với các tham số $n = 5, r = 10, p = q = 2$. Khi trường ở TCS, hàm phân bố photon theo thời gian $P_n(t)$ có biên độ dao động xấp xỉ 0,2, trong khi ở PATCS biên độ dao động này xấp xỉ 0,4 và 0,6 tương ứng với số photon được thêm vào ba mode của trường là (1,1,1) và (3,3,3). Bên cạnh đó, đồ thị trên Hình 3 còn cho thấy khi trường ở TCS thì chu kỳ dao động của $P_n(t)$ không rõ ràng, chu kỳ sau chùng phủ với chu kỳ trước. Tuy nhiên, khi thêm photon vào các mode của trường ở PATCS, chúng ta thấy rõ sự dao động tuần hoàn của $P_n(t)$ theo thời gian với sự tách biệt rõ ràng trong mỗi chu kỳ, đồng thời giá trị cực đại của $P_n(t)$ cũng tăng lên theo sự tăng số photon vào ba mode của trường.

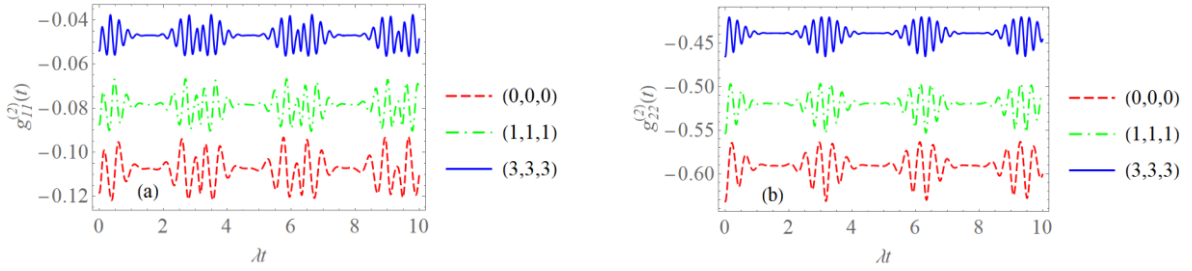


Hình 3. Đồ thị sự phụ thuộc của $g_{ii}^{(2)}(t)$ theo λt với $r = 5, p = q = 0$ và bộ (h, k, l) tương ứng với đường nét gạch đỏ $g_{ii}^{(2)}(t)$ là (0,0,0); đường nét gạch chấm xanh lá $[g_{ii}^{(2)}(t) + 0,06]$ là (1,1,1); đường liền nét xanh đậm $[g_{ii}^{(2)}(t) + 0,1]$ ứng với $(h, k, l) = (3,3,3)$

Hình 4 và 5 mô tả sự phụ thuộc của hàm tương quan bậc hai cùng mode theo thời gian $g_{ii}^{(2)}(t)$. Nó cho biết tính chất của các photon mode i theo thời gian với $i = \{1,2\}$, tương ứng với các mode a và b của trường. Trong đó, Hình 4 được vẽ cho trường hợp $p = q = 0$, nghĩa là số photon trong ba mode của trường ở TCS và PATCS là như nhau, nên $g_{11}^{(2)}(t) = g_{22}^{(2)}(t)$ và Hình 5 được vẽ cho trường hợp $p = q \neq 0$, nghĩa là số photon ở các mode là khác nhau, ứng với Hình 5a (5b) mô tả tính chất các photon mode a (b). Các đồ thị trong Hình 4 và Hình 5 cho thấy hàm tương quan bậc hai cùng mode theo thời gian $g_{ii}^{(2)}(t)$ luôn âm trong mọi trường hợp khi trường ở TCS hay PATCS, nghĩa là các photon trong hai mode a và b đều có tính phản kết chùm. Tuy nhiên, khi thêm photon vào các mode của trường (đường nét gạch chấm xanh lá và đường liền nét xanh đậm) thì giá trị của hàm $g_{ii}^{(2)}(t)$ tăng lên và chu kỳ dao động của nó càng rõ ràng hơn. Bên cạnh đó, việc tăng cường độ trường ban đầu thông qua tham số r cũng làm cho chu kỳ dao động của $g_{ii}^{(2)}(t)$ rõ ràng hơn và số dao động trong mỗi chu kỳ cũng tăng lên. Ngoài ra, trên Hình 5, khi số photon các mode là khác nhau thì giá trị của hàm $g_{22}^{(2)}(t)$ (Hình 5b) bé hơn rất nhiều so với $g_{11}^{(2)}(t)$ (Hình 5a). Điều này càng chứng tỏ số photon được thêm vào ba mode của trường PATCS và cường độ trường ban đầu có ảnh hưởng lớn đến tính chất phản kết chùm của photon các mode trong quá trình chúng tương tác với nguyên tử trong mô hình JC hai mode.

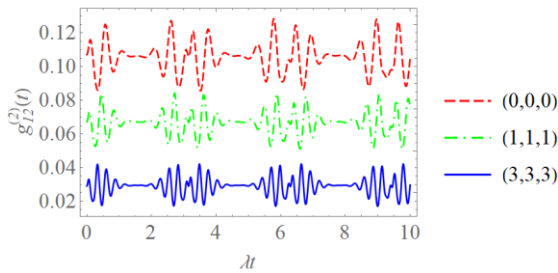


Hình 4. Đồ thị sự phụ thuộc của $P_n(t)$ theo λt với các tham số $n = 5, r = 10, p = q = 2$ và bộ (h, k, l) tương ứng với đường nét gạch đỏ $[P_n(t) + 1,1]$ là (0,0,0); đường nét gạch chấm xanh lá $[P_n(t) + 0,6]$ là (1,1,1); đường liền nét xanh đậm $P_n(t)$ ứng với $(h, k, l) = (3,3,3)$



Hình 5. Đồ thị sự phụ thuộc của $g_{ii}^{(2)}(t)$ theo λt , $i = \{1,2\}$ với các tham số $r = 10$, $p = q = 2$, (a) $g_{11}^{(2)}(t)$; (b) $g_{22}^{(2)}(t)$ và bộ (h,k,l) tương ứng với đường nét gạch đỏ $g_{ii}^{(2)}(t)$ là $(0,0,0)$; đường nét gạch chấm xanh lá $[g_{ii}^{(2)}(t)+0.02]$ là $(1,1,1)$; đường liền nét xanh đậm $[g_{ii}^{(2)}(t)+0.04]$ ứng với $(h,k,l) = (3,3,3)$

Hình 6 mô tả mối tương quan giữa hai mode a và b qua đồ thị hàm tương quan bậc hai khác mode $g_{12}^{(2)}(t)$ theo thời gian. Đồ thị cho thấy, trong cả hai trường hợp, khi trường ở TCS hay PATCS thì các photon ở hai mode a và b của trường đều tương quan với nhau vì hàm $g_{12}^{(2)}(t)$ luôn dương. Khi càng thêm số photon vào ba mode của trường thì giá trị cực đại của $g_{12}^{(2)}(t)$ giảm nhẹ, nhưng số dao động trong mỗi chu kỳ tăng lên; sự dao động là tuần hoàn, đều đặn và có sự phân biệt rõ ràng giữa các chu kỳ.



Hình 6. Đồ thị sự phụ thuộc của $g_{12}^{(2)}(t)$ theo λt với các tham số $p = q = 2$, $r = 10$ và bộ (h,k,l) tương ứng với đường nét gạch đỏ $[g_{12}^{(2)}(t)+0.06]$ là $(0,0,0)$; đường nét gạch chấm xanh lá $[g_{12}^{(2)}(t)+0.03]$ là $(1,1,1)$; đường liền nét xanh đậm $g_{12}^{(2)}(t)$ là $(3,3,3)$

6 Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã khảo sát các tính chất động lượng tử của một nguyên tử và trường ở PATCS với kết quả là các tính chất này phụ thuộc vào cường độ trường ban đầu (r), sự chênh lệch số photon giữa các mode của trường (p , q) và số photon thêm vào ba mode của trường PATCS (h , k , l). Đối với nguyên tử thì xác suất tìm nguyên tử ở trạng thái kích thích thể hiện sự dao động theo chu kỳ Rabi, nghĩa là có sự suy giảm và hồi phục tuần hoàn đều đặn. Khi cường độ trường ban đầu tăng hoặc số photon thêm vào ba mode của trường ở PATCS tăng lên thì số dao động trong mỗi chu kỳ cũng tăng lên. Ngoài ra, khi số photon trong mỗi mode khác nhau, thì sự dao động này không thể hiện sự đối xứng nữa và chúng sẽ được cải thiện khi tăng số photon vào ba mode của trường ở PATCS. Đây chính là điểm khác biệt giữa trường ở trạng thái ban đầu là TCS so với PATCS. Đối với các tính chất động lượng tử của trường ở PATCS, các kết quả cũng cho thấy photon trong các mode của trường đều thể hiện tính chất phản kết chùm theo thời gian cũng như sự tương quan giữa hai mode của trường trong quá trình chúng tương tác với nguyên tử. Khi tăng thêm số photon vào ba mode của trường, giá trị cực đại của hàm phân bố photon $P_n(t)$ càng tăng lên và sự dao động của $P_n(t)$ càng tách biệt rõ ràng trong mỗi chu kỳ. Đối với các

hàm tương quan bậc hai cùng mode $g_{ii}^{(2)}(t)$ và hàm tương quan bậc hai khác mode $g_{12}^{(2)}(t)$, chúng đều thể hiện tính phản kết chùm. Các tính chất này đều tuân hoàn theo thời gian tương ứng với chu kỳ dao động Rabi của nguyên tử. Ngoài ra, $g_{12}^{(2)}(t)$ còn thể hiện sự tương quan giữa photon ở hai mode khác nhau trong quá trình tương tác. Khi trường ở trạng thái gốc là TCS và PATCS, các kết quả khảo sát cũng chỉ ra khi tăng số photon vào các mode của trường thì giá trị của $g_{ii}^{(2)}(t)$ và $g_{12}^{(2)}(t)$ có tăng nhẹ và sự đối xứng trong mỗi chu kỳ được cải thiện rõ rệt cũng như số dao động trong mỗi chu kỳ càng tăng lên. Như vậy, các tính chất phi cổ điển khi trường ở PATCS đã được cải thiện rõ rệt khi so sánh với trường ở TCS. Do đó, việc thêm photon vào các mode của trường ở PATCS đem đến nhiều kỳ vọng trong việc thực hiện các nhiệm vụ lượng tử như viễn tải lượng tử trong các hệ đa thành phần [30].

Tài liệu tham khảo

- Simon JDP, Knight PL. Establishment of an entangled atom-field state in the Jaynes-Cummings model. *Physical Review A*. 1991;44(9):6023-6029.
- Ekert A. Quantum cryptography based on Bell's theorem. *Physical Review Letters*. 1991;67(6):661-663.
- Cory DG, Price MD, Maas W, Knill E, Laflamme R, Zurek WH, Havel TF, Somaroo SS. Experimental Quantum Error Correction. *Physical Review Letters*. 1998;81(10):2152-2155.
- Braunstein SL, Loock PV. Quantum information with continuous variables. *Reviews of Modern Physics*. 2000;77(2):513-577.
- Bennett CH, Brassard G, Crepeau C, Jozsa R, Peres A, Wootters WK. Teleporting an unknown quantum state via dual classic and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Physical Review Letters*. 1993;70(13):1895-1899.
- An NB, Kim J. Joint remote state preparation. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*. 2008;41(9):095501.
- An NB. Quantum dialogue. *Physics Letters A*. 2004;328:6-10.
- Stoler D. Equivalence classes of minimum uncertainty packets I. *Physical Review D*. 1970;1(12):3217-3219.
- Caves CM, Schumaker BL. New formalism for two-photon quantum optics. I. Quadrature phases and squeezed states. *Physical Review A*. 1985;31:3068-3093.
- Agarwal GS, Biswas A. Quantitative measures of entanglement in pair-coherent state. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*. 2005;7(11):350-354.
- An NB, Duc TM. Trio coherent state. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*. 2002;4:80-85.
- An NB. Multimode higher-order antibunching and squeezing in trio coherent state. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*. 2002;4(3):222-227.
- Duc TM, Dat TQ, An NB, Kim J. Scheme for the generation of freely traveling optical trio coherent states. *Physical Review A*. 2013;88(2):022320.
- Duc TM, Dat TQ, Chuong HS. Quantum entanglement and teleportation in superposition of multiple-photon-added two-mode squeezed vacuum state. *International Journal of Modern Physics B*. 2020;34(25):2050223.
- Dat TQ, Thang TM, Duc TM. Non-classical properties and generation schemes of superposition of multiple-photon-added two-mode squeezed vacuum state. *Hue University Journal of science: Natural Science*. 2021;130(1B):5-12.
- Yuan HC, Xu XX, Fan HY. Statistical properties of the generalized photon-added pair coherent state. *International Journal of Theoretical Physics*. 2009;48:3596-3606.
- Duc TM, Chuong HS, Dat TQ. Detecting nonclassicality and non-Gaussianity by the Wigner function and quantum teleportation in photon-added-and-subtracted two modes pair coherent state. *Journal of Computational Electronics*. 2021;20(6):2124-2134.
- Duc TM, Dat TQ. Enhancing nonclassical and entanglement properties of trio coherent states by photon-addition. *Optik*. 2020;210:164479.
- Duc TM, Hoai NTX, An NB. Sum squeezing, different squeezing, higher-order antibunching and entanglement of two-mode photon-added displaced

- squeezed states. *International Journal of Theoretical Physics*. 2013;53(3):899-910.
20. Rempe G, Walther H, Klein N. Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser. *Physical Review Letters*. 1987; 58(4):353-356.
 21. Eberly JH, Narozhny NB, Sanchez-Mondragon JJ. Periodic spontaneous collapse and revival in a simple quantum model. *Physical Review Letters*. 1980;44(20):1323-1326.
 22. Hilery M. Squeezing and photon number in the Jaynes-Cummings model. *Physical Review A*. 1989;39(3):1556-1557.
 23. Shih-Chuan Gou. Time evolution of a two-mode Jaynes-Cummings model in the presence of pair-coherent state. *Journal of Modern Optics*. 1990;37(9):1469-1486.
 24. Thanh LTH, Duc TM. Dynamical properties of the field in generalized photon-added pair coherent state in the Jaynes-Cummings model. *International Journal of Theoretical Physics*. 2022;61(5):129
 25. Duc TM, Nha DH. Dynamical properties of the trio coherent states in the two-mode Jaynes-Cummings-model. *Proceedings of the Ninth Asia Pacific Physics Conference (9th APPC)*, Hanoi, Vietnam. 2004;25-31.
 26. An NB. Dynamics of the field in trio coherent states interacting with an atom via multi-photon transitions. *Journal of the Korean Physical Society*. 2005;47(1):54-62.
 27. Dat TQ, Duc TM. Higer-order nonclassical and entanglement properties in photon-added trio coherent state. *Hue University Journal of Science: Natural Science*. 2020;129(1B):49-55.
 28. Christopher CC, Peter LK. *Introductory Quantum Optics*. Cambridge: Cambridge University Press; 2005.
 29. Pathak A, Garcia M. Control of higer order antibunching. *Applied Physics B*. 2000;84(3):479-484.
 30. Karlsson A, Bourennane M. Quantum teleportation using three-particle entanglement. *Physical Review A*. 1998;58(6):4394-4400.