



## HỖ TRỢ QUÁ TRÌNH XÂY DỰNG MÔ HÌNH THỰC VÀ MÔ HÌNH TOÁN HỌC CỦA HỌC SINH

**Nguyễn Thị Tân An**

Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế, 32 Nguyễn Huệ, Tp. Huế, Việt Nam

**Nguyễn Khắc Bình**

Trường THPT Chuyên Quảng Trị, Quảng Trị, Việt Nam

\* Tác giả liên hệ: Nguyễn Thị Tân An <tanan0704@gmail.com >

(Ngày nhận bài: 17-5-2021; Ngày chấp nhận đăng: 26-7-2021)

**Tóm tắt.** *Mô hình hóa toán học* là một quá trình phức tạp đòi hỏi học sinh phải có nhiều năng lực khác nhau trong các lĩnh vực toán học khác nhau cũng như có kiến thức liên quan đến các tình huống thực tế được xem xét. Người bắt đầu làm mô hình hóa thường gặp những khó khăn liên quan đến ba giai đoạn cần đưa ra chiến lược của quá trình này, cụ thể là xây dựng mô hình thực, xây dựng mô hình toán và giải quyết bài toán. Trong nghiên cứu này, dựa trên quy trình toán học hóa chú trọng đến việc dự kiến các chiến lược hữu ích về toán học của Niss (2010), chúng tôi đã điều chỉnh bộ câu hỏi của Stillman và các cộng sự (2015) để làm khung hỗ trợ học tập, giúp những người bắt đầu làm quen với mô hình hóa định hướng, hình thành và thực hiện các chiến lược xây dựng mô hình thực, mô hình toán học, cũng như giải quyết bài toán. Kết quả của nghiên cứu bước đầu cho thấy khung hỗ trợ học tập đã giúp học sinh tiến bộ dần dần trong việc xây dựng mô hình thực, mô hình toán và giải toán, rút ngắn thời gian làm quen cũng như hình thành năng lực mô hình hóa cho các em.

**Từ khóa:** Mô hình hóa, mô hình thực, mô hình toán học, khung hỗ trợ học tập.

## SUPPORTING STUDENTS' PROCESS OF BUILDING REAL MODELS AND MATHEMATICAL MODELS

**Nguyen Thi Tan An**

University of Education, Hue University, 32 St., Hue city, Vietnam

**Nguyen Khac Binh**

Le Quy Don High School for the Gifted, Quảng Trị, Viet Nam

\* Correspondence to **Le Lam Thi** <lclamthi82@gmail.com>

(Received: May 17, 2021; Accepted: July 26, 2021)

**Abstract.** Mathematical modeling is a complex process that requires students to have different competencies in different areas of mathematics as well as knowledge related to the real-life situations. Beginner modelers often encounter difficulties related to the three phases of modeling process namely building a real model, building mathematical model, and solving a problem. In this study, basing on the mathematization process that focuses on predicting mathematically useful strategies by Niss (2010), we have adapted the questionnaire of Stillman et al. (2015) to serve as a scaffolding, to help beginners become familiar with modeling, as well as to orient, formulate and implement strategies for building real models, mathematical models, and problem-solving. Initial results of the study show that the strategies have helped students gradually make progress in creating real models, mathematical models and solving problems, shortening the familiarization time as well as forming modeling capacity.

**Keywords:** Mathematical modeling, real model, mathematical model, scaffolding.

## 1. Mở đầu

Giảng dạy và học tập mô hình hóa ở trường phổ thông và đại học đã trở thành một chủ đề nổi bật trong những thập kỷ qua trên toàn thế giới vì sự gia tăng nhu cầu sử dụng toán học trong khoa học, công nghệ và cuộc sống hàng ngày [6]. *Mô hình hóa toán học* hay nói ngắn gọn là mô hình hóa (MHH) là một chuỗi các hoạt động, bao gồm sự chuyển đổi giữa toán học và thực tế theo cả hai chiều. MHH thường được biểu diễn như một quá trình bắt đầu với một vấn đề đặt ra trong tình huống thực tế, sau đó tình huống được lý tưởng hóa, trừu tượng hóa thành các biểu diễn toán học và được giải quyết thông qua sử dụng các quá trình toán học. Người thực hiện MHH dựa trên kết quả toán có được để đưa ra phương pháp giải quyết đối với vấn đề ban đầu, tuy nhiên nếu cách giải quyết không phù hợp với ngữ cảnh thực tế thì quá trình trên được lặp lại [4]. Do tầm quan trọng của MHH và năng lực MHH đối với giáo dục toán học, chương trình giáo dục phổ thông môn Toán (Bộ Giáo dục & Đào tạo, 2018) xem MHH là một trong năm năng lực toán học cần hình thành và phát triển cho học sinh. Không chỉ riêng Việt Nam, từ lâu MHH đã được đưa vào chương trình ở nhiều nước chẳng hạn như Singapore, Đức, Pháp, Hà Lan, Úc, Mỹ, Thụy Sĩ với các mức độ khác nhau [6].

Nhiều nhà nghiên cứu mô tả quá trình MHH bằng một sơ đồ minh họa các giai đoạn chính của quá trình này như Blomhøj and Jensen (2007), Galbraith and Stillman (2006), Maaß (2006) [3, 5, 7]... Các sơ đồ quy trình MHH là phương tiện để mô tả những gì đang xảy ra khi thực hiện nhiệm vụ MHH và các mức độ nhận thức trong quá trình MHH. Những sơ đồ này cũng được sử dụng để hỗ trợ hoạt động MHH của những người mới bắt đầu làm quen với MHH, giúp người xây dựng MHH hiểu rõ hơn về những gì mình làm, đồng thời là cơ sở cho việc chẩn đoán và can thiệp của giáo viên trong dạy học MHH.

MHH là một quá trình phức tạp đòi hỏi học sinh phải có nhiều năng lực khác nhau cũng như có kiến thức liên quan đến các tình huống thực tế được xem xét. Theo Blum (2011), nghiên

cứu về MHH cần tập trung vào các phương pháp giảng dạy để có thể hỗ trợ học sinh đạt được năng lực MHH [4], bao gồm các năng lực thành phần: (i) hiểu được vấn đề thực tế, đưa ra các giả thiết, nhận ra các đại lượng liên quan và các biến quan trọng để xây dựng mối quan hệ giữa các biến, tìm kiếm các thông tin phù hợp để xây dựng mô hình thực của tình huống; (ii) thiết lập một mô hình toán từ mô hình thực, chuyển đổi các đại lượng liên quan và mối quan hệ của chúng sang ngôn ngữ toán học bằng cách lựa chọn các ký hiệu toán học thích hợp hoặc mô tả tình huống bằng hình vẽ, bảng biểu, đồ thị; (iii) giải quyết các câu hỏi toán học trong mô hình toán; (iv) giải thích kết quả toán học trong tình huống thực tế ban đầu; (v) đánh giá tính hợp lý của cách giải quyết chẳng hạn như các giả thiết đã được thực hiện hoặc mô hình đã sử dụng [7]. Người bắt đầu làm MHH thường gặp những khó khăn liên quan đến ba giai đoạn cần đưa ra chiến lược của quá trình MHH cụ thể là xây dựng mô hình thực, xây dựng mô hình toán và giải quyết bài toán [8], ba giai đoạn này còn được gọi tên là quá trình toán học hóa. Trong đó, hai bước đầu tiên (i) và (ii) quyết định sự thành công của việc MHH và thường không quen thuộc đối với học sinh Việt Nam do các em chủ yếu làm việc với các bài toán được phát biểu sẵn [1]. Vì vậy, sự hỗ trợ từ phía giáo viên là cần thiết để học sinh dần dần hình thành và phát triển năng lực MHH, độc lập và tự tin khi giải quyết các vấn đề MHH.

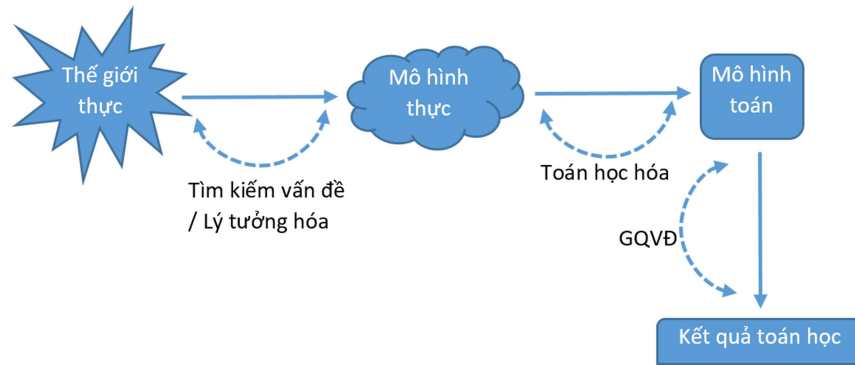
Hiện tại, có rất ít nghiên cứu liên quan đến sự hỗ trợ trong dạy học MHH. Nghiên cứu của Van de Pol và cộng sự (2010) chủ yếu đề cập đến việc hỗ trợ giữa một giáo viên và một học sinh. Stender và Kaiser (2015) nghiên cứu cách các sinh viên sư phạm toán sử dụng giao tiếp để hỗ trợ một nhóm nhỏ học sinh [12]. Nghiên cứu của Smit và cộng sự (2013) cung cấp một cơ sở lý thuyết và thực hành hỗ trợ cả lớp về sử dụng ngôn ngữ toán [11].

Ở Việt Nam, hầu như chưa có nghiên cứu nào đề cập đến vấn đề hỗ trợ người học trong quá trình mô hình hoá toán học. Trong bài báo này, chúng tôi tập trung tìm hiểu hai vấn đề chính: (1) tác động của việc sử dụng khung hỗ trợ học tập được điều chỉnh từ Stillman và cộng sự (2015) lên quá trình xây dựng mô hình thực, mô hình toán và giải toán của học sinh, đồng thời (2) xem xét năng lực mô hình hóa của học sinh được cải tiến như thế nào thông qua quá trình sử dụng khung hỗ trợ học tập đó.

## 2. Sử dụng khung hỗ trợ học tập trong giảng dạy mô hình hóa toán học

Trong bối cảnh của MHH, để đưa ra chiến lược giải quyết đối với tình huống thực tế ban đầu thì người học cần dự kiến trước những gì hữu ích về mặt toán học khi chuyển đổi giữa các giai đoạn của quá trình MHH. Niss (2010) đã đưa ra một mô hình của quy trình toán học hóa bao gồm cả chiều chuyển đổi và phản ánh giữa các giai đoạn nhằm cung cấp thông tin cho việc đưa ra các quyết định, nó không chỉ liên quan đến việc dự kiến chiến lược gì sẽ hữu ích về mặt

toán học trong các bước tiếp theo của quy trình MHH mà còn liên quan tới việc thực thi dự kiến đó để dẫn đến thành công [8].



Hình 1. Quy trình toán học hóa của Niss (2010)

Các đường mũi tên hai chiều trong hình 1 biểu diễn ba bước dự kiến, đưa ra chiến lược và phản hồi khi dự kiến được thực hiện thành công. Maaß (2006) nhận ra rằng có mối liên hệ giữa việc dự kiến kết quả của các hành động ở tương lai với các hành động hiện tại và các dự kiến này cực kỳ quan trọng trong việc mô hình hoá, giúp định hướng hành động [7].

Hướng dẫn nhận thức là một yếu tố hỗ trợ quan trọng trong việc giảng dạy, cung cấp các hướng dẫn để học sinh suy nghĩ, hành động và kích thích sự tương tác [14]. Bằng phương pháp hướng dẫn nhận thức, học sinh không chỉ thích nghi với giải pháp, mà còn thích nghi với cách thức để giải quyết hoặc tư duy, từ đó có thể tự điều chỉnh quá trình giải quyết vấn đề của mình. Hướng dẫn nhận thức là điều kiện tiên quyết của khung hỗ trợ học tập và rất quan trọng cho việc áp dụng khung hỗ trợ học tập trong lớp học, cung cấp cho học sinh những hướng dẫn nhận thức về quá trình giải quyết vấn đề.

Hướng dẫn nhận thức được xây dựng dựa trên khái niệm vùng phát triển gần (zone of proximal development - ZPD) của Vygotsky (1978), đó là khoảng cách giữa vùng phát triển nhận thức hiện tại và vùng phát triển nhận thức tiềm năng [16]. Trong đó, vùng phát triển nhận thức hiện tại là mức độ phát triển mà người học có thể tự tiếp thu, tự giải quyết vấn đề một cách độc lập. Còn vùng phát triển nhận thức tiềm năng là mức độ phát triển cao hơn so với vùng phát triển nhận thức hiện tại mà ở đó người học chỉ có thể giải quyết được vấn đề khi có sự giúp đỡ, hướng dẫn của giáo viên hoặc sự hỗ trợ, phối hợp với các bạn cùng lứa tuổi có năng lực hơn. Có rất nhiều cách khác nhau để hỗ trợ sự phát triển nhận thức, bao gồm đưa ra các chỉ dẫn, chia nhiệm vụ thành các bước nhỏ, đơn giản hơn, cung cấp các ví dụ và câu hỏi. Ở bài báo này, chúng tôi sử dụng khung hỗ trợ học tập để hướng dẫn nhận thức trong quá trình giải quyết nhiệm vụ MHH của học sinh.

*Khung hỗ trợ học tập* là sự hỗ trợ tạm thời của giáo viên giúp học sinh thực hiện một nhiệm vụ mà họ không thể tự mình hoàn thành và qua đó dần dần hình thành cho học sinh các năng lực để có thể hoàn thành các nhiệm vụ tương tự một cách độc lập [11]. Khung hỗ trợ học tập không phải được xây dựng một cách ngẫu nhiên hoặc tự phát, mà có chủ đích và hệ thống (trình tự) của người dạy để hỗ trợ người học thích ứng với việc học tập mới [11]. Nó không nhằm mục đích khắc phục những khó khăn tạm thời trong học tập của học sinh mà hướng đến việc phát triển năng lực về lâu dài của các em. Khái niệm khung hỗ trợ học tập (scaffolding) nổi bật trong các nghiên cứu gần đây, nhiều kết quả nghiên cứu thực nghiệm cho thấy tác động tích cực của khung hỗ trợ lên việc học tập của học sinh [2]. Chẳng hạn, Puntambekar và Hubscher (2005) đã đưa ra một số yêu cầu đối với các khung hỗ trợ học tập được sử dụng như công cụ xây dựng chiến lược giải quyết vấn đề là chẩn đoán được những khó khăn của học sinh và cung cấp sự hỗ trợ thích ứng trong quá trình học tập, sử dụng khung hỗ trợ theo hướng giảm dần để dần dần chuyển giao trách nhiệm học tập cho học sinh. Khung hỗ trợ học tập cung cấp các trợ giúp phù hợp cho từng giai đoạn của quá trình giải quyết, hoặc có thể chỉ sử dụng các yếu tố trợ giúp đơn lẻ được chọn từ kế hoạch này. Để khung hỗ trợ dễ hiểu và hấp dẫn, trực quan đối với học sinh, các bước thành phần cần được đưa ra dưới dạng hướng dẫn cụ thể.

Dựa trên quy trình toán học hóa chú trọng đến việc dự kiến các chiến lược hữu ích về toán học của Niss (2010), trong nghiên cứu này, chúng tôi đã điều chỉnh bộ câu hỏi của Stillman và các cộng sự (2015) để làm khung hỗ trợ học tập, giúp những người bắt đầu làm quen với MHH định hướng, hình thành và thực hiện các chiến lược xây dựng mô hình thực, mô hình toán học, cũng như giải quyết bài toán. Chúng tôi đã loại bỏ các câu hỏi liên quan đến công nghệ vì trong nghiên cứu này học sinh giải quyết các tình huống đưa ra chỉ bằng giấy, bút đồng thời bổ sung thêm một số ý để các câu hỏi gọi ý rõ ràng, dễ hiểu đối với học sinh và khung hỗ trợ cụ thể được trình bày như dưới đây:

#### XÂY DỰNG MÔ HÌNH THỰC (R)

R1: Em hiểu tình huống như thế nào? (làm rõ ngữ cảnh của tình huống bằng lời, hình vẽ, bảng...)

R2: Em quan tâm đến những yếu tố nào của tình huống?

R3: Những yếu tố nào của tình huống có liên quan với nhau?

R4: Em có thể làm cho tình huống đơn giản hơn bằng cách thêm vào các giả thiết nào?

R5: Yếu tố then chốt của tình huống mà em có thể sử dụng để xác định kiến thức toán liên quan là gì? Yếu tố then chốt đó có thể chuyển đổi sang ngôn ngữ toán học như thế nào?

R6: Em có thể đặt ra những câu hỏi như thế nào? Những câu hỏi đó có hữu ích trong việc

xây dựng bài toán tương ứng với tình huống không?

#### XÂY DỰNG MÔ HÌNH TOÁN HỌC (M)

M1: Làm thế nào em có thể xây dựng bài toán cho tình huống?

M2: Em có thể sử dụng mô hình hoặc biểu diễn toán học nào?

M3: Những biểu diễn toán học nào em đã sử dụng trước đây trong một trường hợp tương tự?

M4: Em có thể đặt ra những câu hỏi toán học như thế nào?

M5: Những bài toán nào em đã thực hiện thành công trong quá khứ có liên quan đến tình huống?

#### GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ TOÁN HỌC (S)

S1: Nếu em sử dụng biểu diễn toán học đó thì nó cho phép em giải bài toán như thế nào?

S2: Nếu em sử dụng mô hình đó thì kiến thức toán học nào em sẽ cần biết hoặc sử dụng?

S3: Nếu em sử dụng mô hình đó thì sẽ ảnh hưởng như thế nào đến bài toán mà em xây dựng?

S4: Nếu em sử dụng mô hình đó thì sẽ ảnh hưởng như thế nào đến các đặc điểm của tình huống mà em nghĩ là có liên quan hoặc cần thiết?

Các thành viên trong nhóm có thể sử dụng bộ câu hỏi này để trao đổi với nhau, tìm kiếm một hướng đi cho việc MHH của mình. Bộ câu hỏi không chỉ là phương tiện để giúp các cuộc thảo luận phong phú hơn trong tư duy mà còn tạo điều kiện cho cuộc thảo luận hiệu quả, hướng dẫn những người mới bắt đầu MHH đi từ trọng tâm của bối cảnh có vấn đề chuyển sang xây dựng mô hình thực, mô hình toán phù hợp cho tình huống.

### 3. Phương pháp nghiên cứu

Phương pháp nghiên cứu chúng tôi thực hiện ở nghiên cứu này là *phương pháp thực nghiệm* để có thể quan sát và phân tích các hoạt động nhận thức của học sinh khi giải quyết các tình huống MHH có khung hỗ trợ học tập. Trong nghiên cứu này chúng tôi thiết kế bốn tình huống MHH dựa trên bối cảnh thực của tỉnh Quảng Trị, nơi các em học sinh sinh sống và học tập, với ngữ cảnh quen thuộc, gần gũi với các em. Cụ thể như sau:

**Bảng 1.** Các tình huống MHH thực hiện trong nghiên cứu này

Tình huống	Ngữ cảnh	Kiến thức toán
1	Vận chuyển hàng hóa, tối ưu lợi nhuận	Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn
2	Xây dựng, tính số viên ngói cần lợp cho các dãy nhà của trường học	Góc giữa hai mặt phẳng, diện tích hình chiếu
3	Hàng hải, xác định khoảng cách để thủy thủ bắt đầu nhìn thấy đèn hải đăng Mũi Lay	Hình cầu, độ dài cung tròn, hệ thức lượng trong tam giác
4	Trang trí đèn	Hình trụ, trải hình trong không gian

Dưới đây là minh họa của một trong bốn tình huống thực nghiệm chúng tôi đã sử dụng trong nghiên cứu này:

Tình huống 2. Mái tôn các dãy nhà của trường THPT Chuyên Quảng Trị hiện tại đã xuống cấp. Hơn nữa, để giảm nóng cho học sinh vào mùa hè, Ban giám hiệu nhà trường quyết định thay toàn bộ mái tôn của các dãy nhà thành mái ngói. Theo em, nhà trường cần mua bao nhiêu viên ngói để thay đủ toàn bộ mái tôn hiện tại.

**Hình 2.** Một tình huống thực nghiệm

Bên cạnh đó, chúng tôi thiết kế khung hỗ trợ học tập theo khung lý thuyết đã đề cập ở trên gắn với các tình huống 1, 2 và 3 để phát cho học sinh. Học sinh không bắt buộc phải trả lời các câu hỏi của khung hỗ trợ một cách tường minh. Các khung hỗ trợ này chỉ cung cấp cho học sinh tổng quan về giải pháp chung và các bước đơn lẻ của nó [15]. Ở mỗi giai đoạn khác nhau của quá trình giải quyết, các gợi ý hữu ích được liệt kê, nhưng không có một giải pháp mẫu mực, hoàn chỉnh cho toàn bộ quá trình. Các tình huống đều có thể giải quyết với kiến thức toán học sinh đã có tính đến thời điểm thực nghiệm. Ngoài ra, các tình huống 1, 2 và 3 được sử dụng trong thực nghiệm có độ khó tương đương nhau nhưng các hỗ trợ cụ thể gắn với tình huống giảm dần. Như vậy, khung hỗ trợ chúng tôi sử dụng trong nghiên cứu này dành cho toàn bộ lớp học chứ không phải trong trường hợp một giáo viên – một học sinh, nhưng vẫn đảm bảo ba tiêu chí như Smit và cộng sự (2013) đưa ra, đó là dựa trên việc chẩn đoán những khó khăn của học sinh, giảm dần tính hỗ trợ qua các tình huống, hướng tới tính độc lập trong giải quyết các tình huống MHH ở học sinh.

Nghiên cứu được thực hiện với 30 học sinh lớp 12 chuyên Lý và lớp đối chứng là 29 học sinh lớp 12 chuyên Tin của trường THPT chuyên Lê Quý Đôn tỉnh Quảng Trị. Lớp chuyên Lý gồm 24 nam và 6 nữ, lớp chuyên Tin có 25 nam và 4 nữ, các em học toán theo chương trình bình thường. Học sinh của cả hai lớp đều có điểm trung bình môn Toán năm học lớp 11 khá giỏi. Tại thời điểm thực nghiệm, học sinh đã được trang bị đầy đủ kiến thức toán của lớp 11 tuy nhiên chưa từng được giới thiệu về quá trình MHH hoặc tiếp cận với các tình huống thực tế ngoài các bài tập trong sách giáo khoa. Khi tiến hành thực nghiệm, học sinh ở hai lớp đồng thời giải quyết cùng một tình huống ở hai phòng học khác nhau. Chúng tôi chia ngẫu nhiên mỗi lớp thành 5 đến 6 nhóm học tập, mỗi nhóm gồm 5 hoặc 6 học sinh và duy trì tổ chức nhóm suốt quá trình thực nghiệm. Chúng tôi tổ chức lớp học theo nhóm vì khi tham gia vào tình huống có vấn đề cùng nhau, các học sinh thường được lôi cuốn vào cách tư duy, suy luận, cũng như biểu hiện về niềm tin vào công việc MHH, tự tin với kiến thức toán và khả năng sử dụng kiến thức của những học sinh trong nhóm [10]. Thực nghiệm được tiến hành trong 4 buổi, mỗi buổi các nhóm học sinh giải quyết một tình huống trong thời gian 45 phút. Học sinh làm việc độc lập theo nhóm và trình bày giải pháp vào giấy. Ở ba buổi đầu, các nhóm học sinh lớp thực nghiệm 12 Lý được sử dụng khung hỗ trợ học tập để hỗ trợ việc giải quyết tình huống, trong khi đó các nhóm lớp đối chứng 12 Tin không có khung hỗ trợ học tập. Ngoài ra, học sinh được sử dụng máy tính cầm tay để tính toán, sử dụng điện thoại truy cập internet để tìm kiếm thông tin. Hết thời gian làm bài, cả hai lớp về cùng một phòng học và tham khảo một phương án giải quyết tình huống mà chúng tôi đã chuẩn bị. Buổi cuối của đợt thực nghiệm, lớp thực nghiệm 12 Lý không được cung cấp khung hỗ trợ học tập vì chúng tôi muốn xác định liệu sau ba tình huống có sử dụng khung hỗ trợ thì học sinh có thể tự giải quyết tình huống thứ tư một cách độc lập không.

Trong nghiên cứu này, chúng tôi sử dụng phương pháp kết hợp giữa nghiên cứu định tính và nghiên cứu định lượng để phân tích dữ liệu. Dữ liệu định lượng gồm kết quả đánh giá (lượng hóa thành điểm từ 0 - 3) bài trình bày cách giải quyết các tình huống MHH của học sinh, tập trung vào ba giai đoạn xây dựng mô hình thực, mô hình toán và giải toán của quy trình MHH.

*Bảng 2.* Thang đánh giá bài làm của học sinh

	Thang điểm	Tiêu chí
<b>MH thực</b>	3	MH thực phù hợp hoàn toàn với tình huống đặt ra
	2	MH thực phù hợp phần lớn với tình huống đặt ra
	1	MH thực phù hợp một phần với tình huống đặt ra
	0	Không xây dựng được MH thực / MH thực không phù hợp
<b>MH toán</b>	3	MH toán phù hợp hoàn toàn với MH thực và tình huống đặt ra
	2	MH toán phù hợp phần lớn với MH thực và tình huống đặt ra



	1	MH toán phù hợp một phần với MH thực và tình huống đặt ra
	0	Không xây dựng được mô hình toán / MH toán không phù hợp
<b>Giải toán</b>	3	Giải quyết bài toán đúng hoàn toàn, kết quả toán phù hợp hoàn toàn với MH toán và tình huống đặt ra
	2	Giải quyết bài toán có sai sót nhỏ / giải thích không rõ, kết quả toán phù hợp phần lớn với MH toán và tình huống đặt ra
	1	Giải quyết bài toán đúng một phần, kết quả toán phù hợp một phần với MH toán và tình huống đặt ra
	0	Không giải được bài toán đặt ra

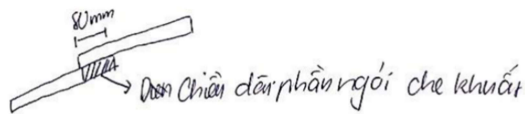
Dữ liệu định tính được thu thập thông qua phân tích bài làm của các nhóm học sinh đối với mỗi tình huống nhằm mục đích cung cấp cái nhìn tổng quan về khung hỗ trợ học tập đối với việc xây dựng mô hình thực và mô hình toán, giải toán của học sinh.

#### 4. Kết quả và thảo luận

##### Khả năng xây dựng mô hình thực của học sinh

Ở tình huống 1, khi xây dựng mô hình thực, với các câu hỏi gợi ý trong khung hỗ trợ học tập, hầu hết các nhóm học sinh xác định được các giả thiết cần có để giải quyết tình huống như trọng tải của xe, thể tích / kích thước của thùng xe, thể tích / kích thước của mỗi bao hàng, lý tưởng hóa các bao hàng là những hình trụ hoặc hình hộp chữ nhật, giá tiền vận chuyển mỗi bao / kilogram hàng. Tuy nhiên, khi xác định vấn đề cần giải quyết thì chỉ có 2 nhóm xác định đúng (nhóm 3 và nhóm 4), có 2 nhóm nhầm lẫn vấn đề đặt ra của tình huống là tìm số bao hàng cần chở mỗi loại để số tiền thu được khi bán hết lượng hàng hóa trên xe là lớn nhất (nhóm 1 và nhóm 5) nên nhóm đã đưa vào giả thiết giá tiền của mỗi bao hàng hoặc xác định sai vấn đề như nhóm 2, còn nhóm 6 không xác định được vấn đề. Ở tình huống này, giả thiết các bao hàng có thể tích như nhau và được xếp chồng khít lên nhau không được học sinh phát biểu tường minh, nhưng trong quá trình giải quyết cho thấy các em đã mặc định điều đó.

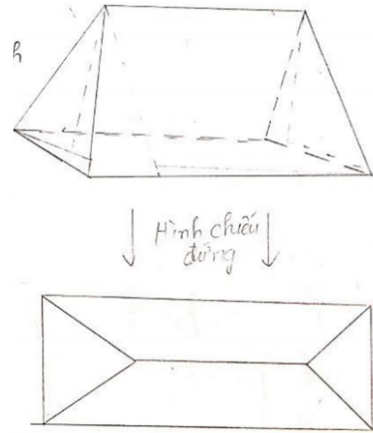
Để giải quyết tình huống số 2, học sinh đã tìm hiểu chiều dài, chiều rộng của dây phòng học, độ dốc của mái, kích thước của mỗi viên ngói / số viên ngói cần để lợp 1m<sup>2</sup>. Tuy nhiên chỉ có hai nhóm đề cập đến cấu trúc xây dựng của mái thông qua hình vẽ (nhóm 2, nhóm 5) và chỉ có nhóm 3 mô tả cách lợp ngói. Các nhóm đều mặc định độ dốc của các mái là như nhau và không nêu giả thiết này một cách tường minh. Cả 6 nhóm đều hiểu đúng vấn đề đặt ra trong tình huống.



Hình 3. Hình vẽ mô tả cách lợp ngói

Đối với tình huống 3, học sinh đã đưa thêm các giả thiết cần thiết như độ cao của tàu so với mực nước biển, khoảng cách từ mắt người đến mặt biển, bán kính trái đất. Tuy nhiên, học sinh bỏ qua việc lý tưởng hóa tình huống, người thủy thủ quan sát trong điều kiện thời tiết đẹp, trời yên biển lặng, để đảm bảo không có các yếu tố khác ảnh hưởng đến mô hình toán học. Ngoài ra, vẫn có nhóm chưa hiểu vấn đề của tình huống một cách đầy đủ như nhóm 4 và nhóm 6 nên các em cho rằng thủy thủ sẽ thấy đỉnh của ngọn hải đăng trước chứ không phải thấy ánh sáng đèn và tính khoảng cách mà người thủy thủ bắt đầu thấy đỉnh ngọn hải đăng (cao hơn đèn 0.4m).

Như vậy với khung hỗ trợ học tập, hầu hết các nhóm học sinh đều hiểu được tình huống, chọn lọc được các thông tin liên quan, đưa ra các giả thiết phù hợp về những thông tin còn thiếu. Không phải tất cả các nhóm đều hiểu chính xác nội dung của tình huống và nhận ra chính xác vấn đề cần giải quyết, nhưng khung hỗ trợ học tập đã giúp các em hình dung được tình huống rõ ràng hơn và định hướng suy nghĩ của các em vào những yếu tố cần thiết, hữu ích và liên quan đến tình huống. Bên cạnh đó, chúng tôi nhận thấy học sinh có xu hướng không phát biểu tường minh các giả thiết nhằm tạo môi trường lý tưởng hóa khi xây dựng mô hình toán, chẳng hạn như kích thước các bao hàng là như nhau (tình huống 1), độ dốc của các mái giống nhau (tình huống 2), thủy thủ quan sát đèn hải đăng lúc thời tiết đẹp nên tầm nhìn không bị ngăn cản và độ cao quan sát không bị thay đổi (tình huống 3)... Vì vậy khi dạy học MHH, giáo viên cần khuyến khích học sinh ghi ra các giả thiết này để lý tưởng hóa, đặc biệt hóa tình huống giúp cho việc xây dựng mô hình toán và giải toán chính xác hơn.

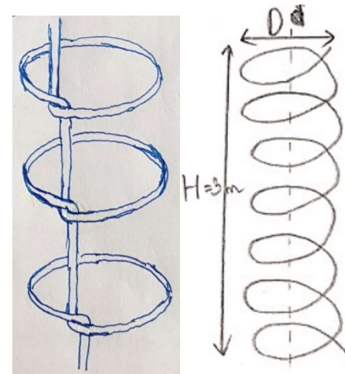


Hình 4. Hình vẽ cấu trúc mái

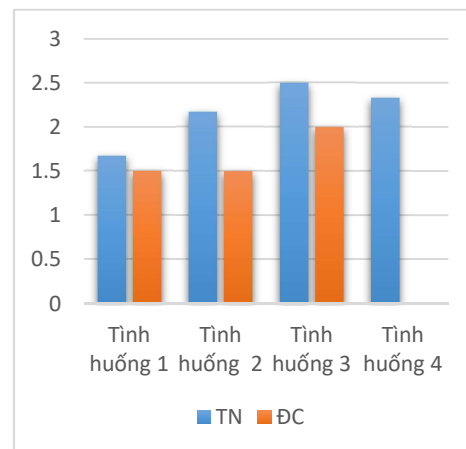
Khi giải quyết tình huống 4 không có khung hỗ trợ học tập, chúng tôi nhận thấy học sinh đã tự tìm kiếm các thông tin khá phù hợp để xây dựng mô hình thực, gồm chiều cao của cây cọ dầu, chiều dài đoạn thân cây cần quấn dây đèn, đường kính hoặc chu vi của thân cây, cách quấn dây đèn theo đường xoắn ốc hoặc quấn tròn rồi thắt kết nối, khoảng cách giữa hai vòng dây kế tiếp hoặc số vòng cần quấn. Tuy nhiên, học sinh mặc định thân cây cọ hình trụ vì vậy không nhóm nào đưa giả thiết này vào. Ngoài ra, một số nhóm thêm giả thiết chưa thực tế như đường kính thân cây quá lớn - bằng 1 mét (nhóm 1), hoặc quấn đèn hết toàn bộ chiều cao của cây mà không chừa phần lá phía trên và phần gốc phía dưới (nhóm 3), nhóm 2 có sự nhầm lẫn giữa đường kính thân cây và đường kính vòng dây quấn đèn.

Sử dụng thang đánh giá 4 bậc trình bày ở phần trước (bảng 2) để đánh giá mô hình thực của các nhóm học sinh ở hai lớp thực nghiệm và đối chứng qua 3 tình huống, tình huống 4 chỉ thực hiện ở lớp thực nghiệm, chúng tôi tính điểm trung bình và thu được kết quả thống kê như **Hình 6**. Dựa vào kết quả trên, có thể thấy rằng điểm của lớp thực nghiệm cao hơn lớp đối chứng ở cả ba tình huống, sự khác biệt thấy rõ ở tình huống 2 và 3, còn với tình huống 1 do lần đầu tiếp xúc với các tình huống MHH nên mặc dù có khung hỗ trợ học tập nhưng học sinh vẫn còn nhiều ngỡ ngàng, điểm trung bình của các nhóm ở lớp thực nghiệm chỉ cao hơn lớp đối chứng 0.17.

Bên cạnh đó, học sinh lớp thực nghiệm có sự tiến bộ rõ qua ba tình huống, ở tình huống 4 khi không có khung hỗ trợ, điểm của các em cũng khá cao 2.33. Kết hợp phân tích định tính phía trên, kết quả chứng tỏ khung hỗ trợ học tập đã giúp học sinh cải thiện khả năng xây dựng mô hình thực khi giải quyết tình huống MHH.



**Hình 5.** Hai cách quấn dây đèn của học sinh



**Hình 6.** Kết quả đánh giá mô hình thực

### Khả năng xây dựng mô hình toán học và giải toán của học sinh

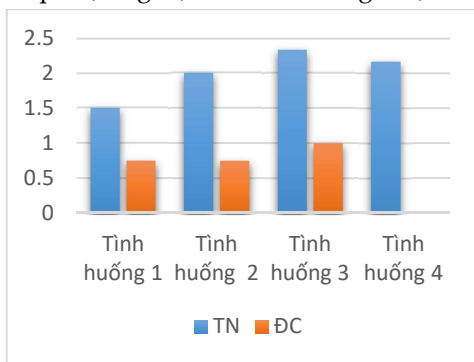
Trong tình huống 1, khung hỗ trợ học tập đã giúp 4/6 nhóm học sinh lớp thực nghiệm nhận ra các yếu tố toán học, các biến và các mối quan hệ của tình huống để chuyển tình huống về bài toán giải hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn, mặc dù chỉ có hai nhóm đưa ra mô hình toán phù hợp. Khi giải toán, hai nhóm đã tìm ra kết quả bằng cách sử dụng máy tính bỏ túi, một nhóm thử các cặp nghiệm nguyên và một nhóm không giải được. Đối với tình huống 2, bài toán mà các nhóm hướng đến là tính diện tích hình đa giác khi biết diện tích hình chiếu của nó và góc giữa hai mặt phẳng. Ở phần giải toán, chỉ có nhóm 3 quan tâm đến phần diện tích các viên ngói lợp chồng lên nhau để trừ đi khi tính số viên ngói cần cho  $1\text{m}^2$ . Không có nhóm nào tính đến phần mái phủ ra ngoài, cũng như tính số viên ngói theo hàng rồi nhân lên số hàng. Tuy nhiên, học sinh biết làm tròn lên khi tính số viên ngói cần lợp, trừ nhóm 6. Nhóm 4 sau khi tính ra kết quả tổng số viên ngói cần mua để thay thế cho mái tôn hiện tại thì cộng thêm 25 viên để phòng khi một số viên ngói có thể bị hỏng, vỡ trong quá trình vận chuyển lên cao, nhưng các em không giải thích được cơ sở việc chọn số 25 của nhóm mình.

Khi xây dựng mô hình toán cho tình huống 3, tất cả các nhóm đều đưa tình huống về bài toán liên quan đến tiếp tuyến của đường tròn trong hình học phẳng và tính độ dài cung, chỉ có nhóm 2 xác định bài toán chưa phù hợp lắm đó là tính đoạn thẳng từ mắt của người thủy thủ đến đỉnh của ngọn hải đăng. Mặc dù, một số nhóm (nhóm 3 và nhóm 5) phát hiện ra rằng hai khoảng cách tàu đến ngọn hải đăng (cung tròn) và mắt đến đỉnh của hải đăng (đoạn thẳng) là xấp xỉ nhau nhưng cả hai nhóm đều chưa giải thích được nguyên nhân là do chiều cao của ngọn hải đăng và mắt người so với mực nước biển quá bé so với bán kính của trái đất. Các nhóm đều sử dụng hình vẽ để biểu diễn tình huống một cách toán học. Việc giải toán trong tình huống này học sinh không gặp nhiều khó khăn.

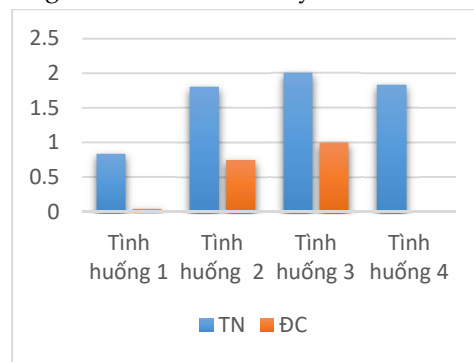
Thông qua quan sát và phân tích bài làm của học sinh, chúng tôi nhận thấy học sinh không trình bày phương án giải quyết tình huống theo thứ tự mô hình thực, đến mô hình toán và giải toán mà ba bước này được trình bày đan xen nhau trong phần bài làm của các em. Để giải quyết tình huống MHH, học sinh thường bắt đầu với việc hình dung bài toán tương ứng với tình huống (mô hình toán) và cách giải trước, khi thiếu thông tin để giải bài toán thì học sinh trở lại bổ sung giả thiết vào mô hình thực. Quá trình này lặp đi lặp lại cho đến khi học sinh giải quyết tình huống thành công, điều này tương tự với quá trình nhận thức trong mô hình của Niss (2010) mà chúng tôi đã trình bày ở phần khung lý thuyết của bài báo. Ngoài ra, nhiều nhóm học sinh gặp khó khăn trong việc vẽ các hình ảnh không gian để minh họa cho các mô hình toán.

Đối với mô hình toán học của tình huống 4, các nhóm chọn cách trải phẳng một vòng quần dây đèn thành đường chéo của hình chữ nhật có kích thước các cạnh lần lượt là khoảng

cách giữa hai vòng dây kế tiếp hoặc chiều cao của mỗi vòng dây và chu vi thân cây. Từ đó tính chiều dài dây đèn cho một vòng quấn, tính số vòng quấn và chiều dài dây đèn cần cho 20 cây. Một số nhóm gặp khó khăn trong việc vẽ hình ảnh dây đèn quấn quanh hình trụ và biểu diễn khoảng cách giữa hai vòng dây kế tiếp. Ở bước giải toán, có hai nhóm chưa giải thích rõ cách tính độ dài của một vòng dây đèn, một nhóm xét bài toán tổng quát trước sau đó thay các giá trị cụ thể vào để tính kết quả. Kết quả của các nhóm đều phù hợp với mô hình toán mà nhóm đưa ra và tình huống thực tế ban đầu. Kết quả đánh giá phần xây dựng mô hình toán và giải toán của lớp thực nghiệm và đối chứng được thể hiện trong các biểu đồ dưới đây:



Hình 7. Kết quả đánh giá Mô hình toán



Hình 8. Kết quả đánh giá bước Giải toán

So với lớp đối chứng, lớp thực nghiệm đạt kết quả cao hơn về mô hình toán và giải toán ở cả ba tình huống. Các nhóm của lớp thực nghiệm đều xây dựng được mô hình toán phù hợp phần lớn hoặc một phần với mô hình thực và tình huống đặt ra. Trong khi đó, ở lớp đối chứng, các nhóm học sinh thường tạo ra mô hình toán ít hoặc không phù hợp. Điểm mô hình toán và giải toán của lớp thực nghiệm tăng dần qua 3 tình huống và khá cao ở tình huống 4, điều này cho thấy khung hỗ trợ học tập đã giúp học sinh dần dần thích nghi với cách thức giải quyết một tình huống MHH.

## 5. Kết luận

Kết quả ở nhóm thực nghiệm và nhóm đối chứng bước đầu cho thấy khung hỗ trợ học tập đã giúp học sinh tiến bộ dần dần trong việc xây dựng mô hình thực, mô hình toán và giải toán, rút ngắn thời gian làm quen cũng như hình thành năng lực MHH của các em. Nhờ các gợi ý trong khung hỗ trợ học tập, học sinh đã tập trung vào những vấn đề then chốt của quá trình MHH để dự kiến, thực hiện và điều chỉnh việc tìm kiếm các thông tin thực tế, kiến thức toán học liên quan và chiến lược giải quyết phù hợp, cũng như hình thành sự tự tin khi giải quyết các vấn đề thực tiễn, đồng thời vẫn tạo cơ hội để học sinh thể hiện sự sáng tạo trong quá trình toán học hóa của mình. Ngoài ra, bằng cách sử dụng tình huống thú vị, không có khung hỗ trợ học tập, kết quả cho thấy học sinh ở lớp thực nghiệm đã hiểu rõ các bước của quá trình toán học

hóa và đưa ra các chiến lược phù hợp để giải quyết, điều này cũng phù hợp với các kết quả nghiên cứu trước đó như Schukajlow và cộng sự (2015), Stillman và cộng sự (2015). Đối với câu hỏi nghiên cứu thứ hai, chúng tôi nhận thấy năng lực MHH của học sinh có sự tiến triển qua các tình huống, tuy nhiên năng lực này chịu tác động bởi các lĩnh vực nội dung toán học khác nhau, cụ thể ở tình huống 1 liên quan đến nội dung hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn thì điểm của nhóm đối chứng và nhóm thực nghiệm đều dưới mức trung bình và chênh lệch thấp nhưng qua đến tình huống 2 và 3 liên quan đến nội dung hình học thì mức chênh lệch lớn hơn. Bên cạnh đó, học sinh có xu hướng xây dựng mô hình toán song song với mô hình thực, khung hỗ trợ học tập đã giúp các em thường xuyên xem xét qua lại giữa hai bước này dẫn đến điểm của năng lực xây dựng mô hình thực và năng lực xây dựng mô hình toán khá xấp xỉ nhau, nhưng học sinh lại ít quan tâm đến các câu hỏi của khung hỗ trợ liên quan đến bước giải toán nên sự điều chỉnh giữa bước giải toán và mô hình toán ít xảy ra, vì lúc này các em chỉ quan tâm đến việc giải toán ra kết quả, đó là lý do điểm của năng lực giải toán còn thấp. Mặc dù, nhiều cách giải quyết của học sinh chưa thực sự phù hợp với thực tế, nhưng điều này có thể cải thiện ở các nghiên cứu trong tương lai, khi học sinh đã thích nghi với quá trình toán học hóa, chúng ta cung cấp cho các em khung hỗ trợ liên quan đến hai bước còn lại của quá trình MHH là giải thích kết quả toán học trong tình huống thực tế và đánh giá tính hợp lý của cách giải quyết. Ngoài ra, cách thức tổ chức lớp học làm việc độc lập theo nhóm với khung hỗ trợ học tập được cung cấp đã tạo môi trường để học sinh là trung tâm của quá trình học tập, tham gia trao đổi, học hỏi lẫn nhau góp phần phát triển tốt năng lực MHH của học sinh. Để áp dụng vào dạy học MHH ở trường PT, khung hỗ trợ học tập nên sử dụng trong thời gian dài, với nhiều tình huống MHH có mức độ khó khác nhau để học sinh nắm vững các giai đoạn của quá trình giải quyết tình huống MHH và hiểu sự trợ giúp được đưa ra trong khung hỗ trợ.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Thị Tân An (2014). Luận án tiến sĩ *Sử dụng toán học hóa để phát triển các năng lực hiểu biết định lượng của học sinh lớp 10*. Đại học sư phạm TP Hồ Chí Minh.
2. Azevedo, R., & Hadwin, A. F. (2005). Scaffolding self-regulated learning and metacognition—implications for the design of computer-based scaffolds. *Instructional Science*, 33(5), 367–379.
3. Blomhøj, M., & Højgaard Jensen, T. (2007). What's all the fuss about competencies? In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study*. New York: Springer, 45-56.

4. Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in the teaching and learning of mathematical modelling—Proceedings of ICTMA14*. New York: Springer, 15-30.
5. Galbraith, P., & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM*, 38(2), 143-162.
6. Kaiser, G., Blum, W., Ferri, R. B., & Stillman, G. (Eds.). (2011). *Trends in teaching and learning of mathematical modelling: ICTMA14* (Vol. 1). Springer Science & Business Media.
7. Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, 38(2), 113–142.
8. Niss, M. (2010). Modeling a crucial aspect of students' mathematical modeling. In R. Lesh, P. Galbraith, C. R. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modelling students' mathematical competencies*. New York: Springer, 43-59.
9. Puntambekar, S., & Hubscher, R. (2005). Tools for scaffolding students in a complex learning environment: what have we gained and what have we missed? *Educational Psychologist*, 40(1), 1–12.
10. Schukajlow, S., Kolter, J., & Blum, W. (2015). Scaffolding mathematical modelling with a solution plan. *ZDM*, 47(7), 1241-1254.
11. Smit, J., van Eerde, H. A. A., & Bakker, A. (2013). A conceptualisation of whole-class scaffolding. *British Educational Research Journal*, 39(5), 817–834.
12. Stender, P., & Kaiser, G. (2015). Scaffolding in complex modelling situations. *ZDM*, 47(7), 1255-1267.
13. Stillman, G. A., Brown, J. P., & Geiger, V. (2015). Facilitating mathematisation in modelling by beginning modellers in secondary school. In *Mathematical modelling in education research and practice*. Springer, Cham, 93-104.
14. Tharp, R., & Gallimore, R. (1988). *Rousing minds to life: teaching, learning, and schooling in social context*. Cambridge: Cambridge University Press.
15. Van Merriënboer, J. J. (1997). *Training complex cognitive skills: a four-component instructional design model for technical training*. Educational Technology.
16. Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in Society*. Cambridge, MA: Harvard University Press.