



PHÁT TRIỂN KIẾN THỨC ĐỂ DẠY HỌC XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN CHO GIÁO VIÊN TOÁN TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Nguyễn Thị Duyệt

Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế, 34 Lê Lợi, tp. Huế, Việt Nam

Nguyễn Thị Mai Thủy

Trường ĐH Sư phạm, ĐH Đà Nẵng, 459 Tôn Đức Thắng, phường Hòa Khánh, tp. Đà Nẵng

Nguyễn Lộc Trường Tài

Trường THPT Long Phước

*Tác giả liên hệ: Nguyễn Thị Duyệt <nguyenthiduyendhsp@gmail.com>

(Ngày nhận bài: 06-11-2025; Ngày chấp nhận đăng: 01-04-2026)

Tóm tắt: Trong những năm gần đây, xác suất trở thành một mạch kiến thức quan trọng, chiếm thời lượng khá lớn trong chương trình toán phổ thông. Do đó, các nghiên cứu về kiến thức để dạy học xác suất thu hút sự quan tâm nghiên cứu của các nhà giáo dục toán trong và ngoài nước. Tuy nhiên, những nghiên cứu bàn về kiến thức để dạy học xác suất có điều kiện hầu như vẫn còn hạn chế. Nghiên cứu này tìm hiểu sự tiến triển của kiến thức để dạy học xác suất có điều kiện của giáo viên toán trung học phổ thông khi tham gia một khóa học về bồi dưỡng nghiệp vụ. Công cụ nghiên cứu là các tình huống liên quan đến xác suất có điều kiện được thiết kế để đo lường các kiểu kiến thức trong mô hình kiến thức toán để dạy học được đề xuất bởi Ball và cộng sự (2008). Dữ liệu nghiên cứu được tiến hành phân tích bằng phương pháp định tính và định lượng để làm rõ sự tiến triển về kiến thức để dạy học xác suất có điều kiện của giáo viên trung học phổ thông. Kết quả nghiên cứu bước đầu cho thấy sự thay đổi trong kiến thức để dạy học xác suất có điều kiện của giáo viên trên bốn lĩnh vực là kiến thức nội dung chung, kiến thức nội dung đặc thù, kiến thức về việc học và kiến thức về việc dạy. Kết quả của nghiên cứu góp phần khẳng định vai trò của các khóa học về bồi dưỡng nghiệp vụ đối với việc phát triển kiến thức để dạy học xác suất có điều kiện cho giáo viên toán.

Từ khóa: xác suất có điều kiện, kiến thức nội dung chung, kiến thức nội dung đặc thù, kiến thức về việc học, kiến thức về việc dạy

DEVELOPING MATHEMATICAL KNOWLEDGE FOR TEACHING CONDITIONAL PROBABILITY AMONG HIGH SCHOOL MATHEMATICS TEACHERS

Nguyễn Thị Duyệt

University of Education, Hue University, Vietnam, 34 Le Loi Str, Hue, Vietnam

Nguyễn Thị Mai Thuy

The University of Danang, University of Science and Education

Nguyễn Lạc Trường Tài

Long Phuoc High School

**Correspondence to: Nguyễn Thị Duyệt <nguyenthiduyendhsp@gmail.com>*

(Received: November 06, 2025; Accepted: April 01, 2026)

Abstract: In recent years, probability has become an important knowledge strand, occupying a significant portion of the high school mathematics curriculum. Consequently, research on knowledge for teaching probability has attracted considerable attention from mathematics educators both domestically and internationally. However, studies discussing mathematics knowledge for teaching conditional probability remain scarce. This study investigated the progression of high school mathematics teachers' knowledge for teaching conditional probability while participating in a professional development course. The research instrument consisted of situations related to conditional probability, designed to measure the types of knowledge within the Mathematics Knowledge for Teaching (MKT) framework by Ball et al. (2008). Research data was analyzed qualitatively and quantitatively to clarify the progression of high school teachers' knowledge for teaching conditional probability. Preliminary findings indicated a change in teachers' mathematical knowledge for teaching conditional probability across four domains: Common Content Knowledge, Specialized Content Knowledge, Knowledge of Content and Students, and Knowledge of Content and Teaching. These findings substantiated the critical role of professional development programs in enhancing mathematics teachers' knowledge for teaching conditional probability.

Keywords: Conditional probability, Common Content Knowledge, Specialized Content Knowledge, Knowledge of Content and Students, Knowledge of Content and Teaching

1. Giới thiệu

Xác suất là một lĩnh vực quan trọng và được ứng dụng rộng rãi trong các ngành khoa học và đời sống. Do đó, mạch kiến thức xác suất chiếm vị trí quan trọng trong chương trình môn toán bậc phổ thông từ cấp tiểu học đến trung học của hầu hết các nước (Batanero, 2022). Chương trình môn toán bậc trung học phổ thông năm 2018 ở Việt Nam đã bổ sung một số nội

dung mới và tăng thời lượng của mạch kiến thức xác suất so với chương trình cải cách năm 2006. Mạch nội dung xác suất đã bổ sung nhiều đơn vị kiến thức mới như nguyên lý xác suất bé, biến ngẫu nhiên rời rạc, xác suất có điều kiện, công thức xác suất toàn phần, công thức Bayes... Xác suất có điều kiện cùng với một số công thức xác suất liên quan như công thức nhân xác suất, công thức xác suất toàn phần, công thức Bayes và ứng dụng của chúng trong thực tiễn đã được đưa vào chương trình toán lớp 12 nhằm phát triển khả năng sử dụng công cụ biểu diễn trực quan như sơ đồ hình cây, giản đồ Venn, bảng hai chiều cho học sinh, nâng cao suy luận xác suất và ứng dụng xác suất vào giải quyết các vấn đề thực tế cho các em (Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2018). Đây là một điểm bổ sung thiết thực của chương trình, dẫn đến việc đổi mới dạy học xác suất theo hướng tích cực và có ý nghĩa hơn đối với việc học tập các môn khoa học khác cũng như cuộc sống hàng ngày của học sinh.

Việc bổ sung nhiều đơn vị kiến thức mới của xác suất có điều kiện vào chương trình toán trung học phổ thông đòi hỏi giáo viên toán phải nâng cao hiểu biết của bản thân về xác suất có điều kiện để có thể dạy học hiệu quả mạch kiến thức này. Để có thể dạy học hiệu quả chủ đề xác suất có điều kiện, giáo viên phải được chuẩn bị đầy đủ kiến thức để dạy học chủ đề này. Sự chuẩn bị của giáo viên bao gồm việc hiểu sâu các đặc trưng của xác suất theo các cách tiếp cận và các nghĩa khác nhau của khái niệm này cùng với kiến thức để dạy học bởi vì sự khác biệt của chủ đề xác suất có điều kiện so với những chủ đề toán học khác trong chương trình (Batanero, 2022). Kết quả nghiên cứu của Nguyễn Ái Quốc (2022) đã chỉ ra rằng giáo viên phải chuẩn bị ý tưởng thiết kế các tình huống dạy học khái niệm xác suất có điều kiện, đánh giá tính hiệu quả của các tình huống dạy học này, điều chỉnh và cải tiến các tình huống dạy học đó để đáp ứng được mục tiêu phát triển hiểu biết khái niệm về xác suất có điều kiện, nâng cao suy luận xác suất và khả năng ứng dụng xác suất có điều kiện vào giải quyết các vấn đề trong học tập và trong cuộc sống cho người học.

Phát triển kiến thức để dạy học cho giáo viên toán nhằm giúp họ thực hiện thành công hoạt động dạy học toán trong bối cảnh đổi mới hiện nay là vấn đề thu hút sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu trong và ngoài nước. Kể từ công trình có tính tiên phong của Shulman (1986) về kiến thức để dạy học của giáo viên, Ball và cộng sự (2008) đã phát triển một mô hình kiến thức toán để dạy học (Mathematical Knowledge for Teaching – MKT). Mô hình MKT được các nhà nghiên cứu trên thế giới sử dụng để đánh giá và phát triển các lĩnh vực kiến thức toán để dạy học các chủ đề toán cụ thể (Kwon và cộng sự, 2012; Qian và Youngs, 2016). Các nhà nghiên cứu ở Việt Nam cũng xem xét và vận dụng mô hình MKT để đánh giá và phát triển kiến thức toán để dạy học một số chủ đề toán cụ thể ở bậc trung học phổ thông như đạo hàm (Lien và Minh, 2018), biểu đồ thống kê (Phuong và Minh, 2018), hàm số liên tục (N. T. Duyên, 2021), tích phân (N. L. T. Tài và N. T. Duyên, 2023) hoặc phát triển kiến thức và niềm tin dạy học toán cho giáo viên thông qua nghiên cứu bài học (Nguyen và Tran, 2023). Hầu như chưa có nghiên

cứu nào trong nước đề cập đến kiến thức dành cho việc dạy học xác suất có điều kiện của giáo viên toán khi họ tham gia vào khóa học phát triển nghiệp vụ.

Sự trừu tượng của xác suất có điều kiện cùng với hiểu nhầm khái niệm của học sinh về chủ đề này (N. T. Duyệt và cộng sự, 2025) khiến cho giáo viên đối mặt với nhiều khó khăn và thách thức khi thực hành dạy học (Díaz và cộng sự, 2010). Bên cạnh đó, sự kết hợp của các rào cản trực giác và kinh nghiệm (Tversky và Kahneman, 1974), yêu cầu cao về ngôn ngữ trừu tượng (Shaughnessy; 1992) và sự phụ thuộc vào các kỹ năng đếm phức tạp làm cho việc dạy học xác suất trở nên khó khăn hơn đáng kể so với nhiều chủ đề toán học khác (Groth, 2010). Ngoài ra, sự thiếu hụt các học phần chuyên sâu về phương pháp luận giảng dạy xác suất trong chương trình đào tạo giáo viên toán tại các cơ sở giáo dục sư phạm ở những thập kỷ trước đã dẫn đến việc chuẩn bị năng lực nghiệp vụ không đầy đủ. Thực trạng này đã tạo nên thách thức đáng kể cho giáo viên trong thực tiễn giảng dạy xác suất (Estrada và cộng sự, 2018). Vì thế, phát triển kiến thức để dạy học xác suất và xác suất có điều kiện cho giáo viên toán trung học phổ thông là cần thiết trong bối cảnh xác suất có điều kiện được đưa vào giảng dạy trong chương trình giáo dục phổ thông ở Việt Nam.

Một số nghiên cứu đã tìm hiểu kiến thức để dạy học xác suất và xác suất có điều kiện của giáo viên trong những năm gần đây (Danisman và Tanışlı, 2017; Groth, 2010). Trong một nghiên cứu trường hợp với ba giáo viên toán trung học, Danisman và Tanışlı (2017) đã chỉ ra rằng kiến thức nội dung sư phạm của các giáo viên về xác suất là chưa đầy đủ và bị ảnh hưởng một phần bởi chuyên môn nghiệp vụ của họ. Nghiên cứu của Groth (2010) cũng chỉ ra rằng giáo viên toán gặp phải một số thách thức khi dạy học xác suất có điều kiện như đặt vấn đề chưa rõ ràng, sử dụng ngôn ngữ thiếu chính xác, hiểu sai bản chất của các biến cố độc lập và không độc lập, không phân biệt giữa xác suất lí thuyết và xác suất thực nghiệm... Bên cạnh đó, kết quả nghiên cứu của Groth cũng chỉ ra rằng thực hành dạy học của giáo viên chưa thật sự hiệu quả vì chúng tập trung nhiều vào việc truyền tải kiến thức quy trình mà thiếu sự kết nối với khái niệm và ý nghĩa của xác suất, cũng như thiếu vắng các vấn đề xác suất có bối cảnh thực tế. Theo Groth, những thách thức mà giáo viên gặp phải khi thực hành dạy học xác suất có điều kiện bắt nguồn từ sự thiếu hụt kiến thức nền tảng về chủ đề này. Do đó, Groth cho rằng cần phải thiết kế các khóa học xác suất chất lượng để phát triển không chỉ kiến thức nội dung mà còn cả kiến thức nội dung sư phạm cho các giáo viên toán.

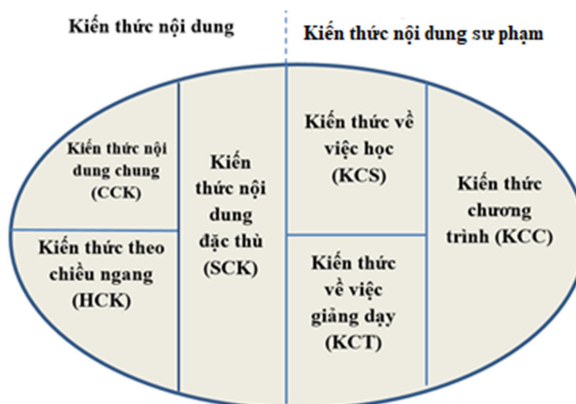
Mặc dù có nhiều nghiên cứu đề cập đến hiểu biết và hiểu nhầm của người học về xác suất, Batanero (2022) đã chỉ ra rằng các nghiên cứu liên quan đến kiến thức để dạy học xác suất, đặc biệt là kiến thức để dạy học xác suất có điều kiện của giáo viên toán hiện nay vẫn chưa được quan tâm đúng mức. Do đó, nghiên cứu này tập trung phân tích ảnh hưởng của một khóa học bồi dưỡng nghiệp vụ đến kiến thức để dạy học xác suất có điều kiện của giáo viên toán trung học phổ thông. Nghiên cứu hướng đến trả lời cho câu hỏi nghiên cứu sau: Kiến thức nội

dung và kiến thức nội dung sư phạm để dạy học xác suất có điều kiện của giáo viên toán trung học phổ thông tiến triển như thế nào qua một khóa học về phát triển nghiệp vụ?

2. Cơ sở lý thuyết

2.1. Kiến thức toán để dạy học

Shulman (1986) đã phân loại các kiểu kiến thức khác nhau của giáo viên gồm (a) *kiến thức sư phạm tổng quát*; (b) *kiến thức về đặc điểm của người học*; (c) *kiến thức về bối cảnh dạy học*; (d) *kiến thức về mục tiêu và giá trị giáo dục*; (e) *kiến thức nội dung môn học*; (f) *kiến thức chương trình*; và (g) *kiến thức sư phạm liên quan đến nội dung cụ thể*. Dựa trên mô hình kiến thức của giáo viên được đề xuất bởi Shulman (1986), Ball và cộng sự (2008) đã phát triển một mô hình kiến thức toán để dạy học (MKT) cùng với bằng chứng thực nghiệm của họ. Mô hình này cùng với các công cụ để đo lường các kiểu kiến thức thành phần đã được nhiều nhà nghiên cứu trên thế giới vận dụng để đánh giá và phát triển các lĩnh vực kiến thức toán để dạy học các chủ đề toán cụ thể.



Hình 2.1. Mô hình kiến thức để dạy học MKT (Ball và cộng sự, 2008)

Kiến thức nội dung bao gồm *kiến thức nội dung chung (CCK)*, *kiến thức nội dung đặc thù (SCK)* và *kiến thức nội dung theo chiều ngang (HCK)*. Kiến thức nội dung sư phạm bao gồm *kiến thức về việc học (KCS)*, *kiến thức về việc giảng dạy (KCT)* và *kiến thức về chương trình (KCC)*.

- **Kiến thức nội dung chung:** được biết đến như kiến thức toán được dùng trong những bối cảnh khác hơn là dạy học. Kiến thức này không chỉ dành riêng cho việc dạy học mà là kiến thức cơ bản mà bất cứ cá nhân nào cũng phải đạt được khi hoàn thành chương trình giáo dục phổ thông. Kiến thức nội dung chung bao gồm các khía cạnh sau: Trả lời hoặc giải đúng bài toán trong ngữ cảnh thông thường; sử dụng đúng những khái niệm, thuật ngữ và ký hiệu toán thông thường; sử dụng được những quy trình, thuật toán và công thức toán cơ bản; nhận ra được tính đúng sai trong lời giải của các bài toán.

- **Kiến thức nội dung đặc thù:** là kiến thức đặc trưng và dành riêng cho việc dạy học toán. Kiến thức này vượt ra khỏi hiểu biết mang tính quy trình mà các kĩ sư hay các nhân viên kế toán cần có mà bao gồm hiểu biết sâu hơn về toán và khả năng sử dụng hiểu biết đó để giao tiếp với người học. Theo Ball và cộng sự (2008), những gợi ý sau liên quan đến kiểu kiến thức nội dung đặc thù: Bình luận, lí giải về tính đúng, sai của câu trả lời của học sinh; sử dụng một biểu diễn hoặc liên kết các biểu diễn khác nhau của một khái niệm, đối tượng toán học; đưa ra ví dụ minh họa, giải thích cho các ý tưởng toán học; lựa chọn, phát biểu các khái niệm toán học sao cho chúng dễ hiểu hơn đối với học sinh.

- **Kiến thức nội dung theo chiều ngang:** là hiểu biết của giáo viên về sự kết nối và mối liên hệ giữa các chủ đề và mạch kiến thức toán trong chương trình. Ball và cộng sự (2008) cho rằng kiến thức nội dung theo chiều ngang là sự hiểu biết rộng hơn về một chủ đề nội dung toán nào đó được giảng dạy trong chương trình. Ngoài ra, Zazkis và Mamolo (2011) đề cập đến cách nhìn các nội dung toán phổ thông từ lăng kính của toán cao cấp khi đề cập đến lĩnh vực kiến thức nội dung theo chiều ngang. Kiến thức nội dung theo chiều ngang được đặc trưng bởi các yếu tố sau: Thực hiện các kết nối các chủ đề trong toán học; thực hiện các kết nối giữa các mạch kiến thức trong toán học; kết nối kiến thức toán phổ thông với kiến thức toán cao cấp ở đại học.

- **Kiến thức về việc học:** là sự kết hợp giữa hiểu biết về toán và hiểu biết về con đường học toán của học sinh. Kiến thức về việc học của học sinh được đặc trưng bởi khả năng lường trước con đường nhận thức cũng như những sai lầm, hiểu nhầm khái niệm hoặc chướng ngại khi học sinh học một khái niệm hay nội dung toán học cụ thể. Theo Ball và cộng sự (2008), các đặc trưng liên quan đến kiến thức về việc học của học sinh bao gồm: Dự đoán được suy nghĩ hay con đường nhận thức toán học của học sinh; dự đoán được các câu trả lời có thể có của học sinh đối với một vấn đề toán học; dự đoán những khó khăn, sai lầm, hiểu nhầm khái niệm và chướng ngại của học sinh khi thực hiện một nhiệm vụ học tập hoặc giải quyết một vấn đề toán học.

- **Kiến thức về việc dạy:** là sự kết hợp giữa hiểu biết về toán và hiểu biết về việc dạy học các nội dung toán đó. Kiến thức này liên quan đến các quyết định của giáo viên về việc dạy học một nội dung cụ thể, chẳng hạn như cách thiết kế một hoạt động dạy học nhằm phát triển hiểu biết toán học của học sinh về một nội dung cụ thể nào đó, cách sử dụng phương pháp và kĩ thuật dạy học, cách lựa chọn công cụ và phương pháp đánh giá phù hợp, tương thích với nội dung. Theo Ball và cộng sự (2008), những khía cạnh sau được xem là thuộc kiến thức về việc dạy: Thiết kế hoạt động hoặc chuỗi hoạt động dạy học hiệu quả cho các nội dung toán cụ thể trong chương trình; lựa chọn phương pháp dạy học, kĩ thuật dạy học, sử dụng công cụ và công nghệ phù hợp để giúp học sinh khám phá các kiến thức toán cụ thể; thiết kế các tình huống giúp học sinh hiểu được bản chất và ý nghĩa của các khái niệm và kiến thức toán học; lựa chọn được các cách biểu diễn thích hợp để minh họa cho một khái niệm hoặc kiến thức toán; thiết kế

được các công cụ đánh giá phù hợp để đánh giá hiểu biết của học sinh về một nội dung toán cụ thể.

- **Kiến thức về chương trình:** là hiểu biết của giáo viên về các mạch kiến thức và các chủ đề toán học được trình bày trong chương trình. Kiến thức về chương trình còn bao hàm cả việc hiểu được mục tiêu, cấu trúc của chương trình, yêu cầu cần đạt đối với từng cấp, từng lớp và từng chủ đề kiến thức toán để thúc đẩy việc xây dựng kế hoạch dạy học phù hợp và hiệu quả. Ball và cộng sự (2008) đã đặc trưng những khía cạnh sau thuộc phạm vi của kiến thức chương trình: Hiểu được các năng lực mong đợi, mục tiêu và yêu cầu cần đạt của chương trình đối với học sinh về một nội dung toán cụ thể; hiểu được cấu trúc và cách thiết kế của chương trình; nắm bắt được sự khớp nối của các mạch kiến thức toán trong chương trình; hiểu được vị trí, tầm quan trọng, vai trò của một lĩnh vực hoặc một nội dung toán cụ thể trong chương trình.

2.2. Kiến thức để dạy học xác suất có điều kiện

Dựa trên mô hình kiến thức toán để dạy học của Ball và cộng sự (2008), chúng tôi đã cụ thể hóa mô hình này vào chủ đề xác suất có điều kiện với các kiểu kiến thức đặc trưng như sau:

- **Các chỉ báo liên quan đến kiểu kiến thức nội dung chung (CCK)**
 - Đưa ra lời giải đúng cho bài toán liên quan đến xác suất có điều kiện: tính xác suất của biến cố hợp, xác suất của biến cố giao, xác suất của biến cố có điều kiện, xác định được tính độc lập của hai biến cố.
 - Nhận dạng và sử dụng đúng những khái niệm, thuật ngữ, ký hiệu toán thông thường liên quan đến xác suất có điều kiện như biến cố, biến cố giao, biến cố hợp, biến cố có điều kiện, xác suất của biến cố, xác suất của biến cố giao, xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra, bảng hai chiều, sơ đồ cây, giản đồ Venn.
 - Sử dụng bảng hai chiều, sơ đồ cây và công thức nhân xác suất, công thức Bayes và công thức xác suất toàn phần để tính xác suất có điều kiện và vận dụng chúng vào giải quyết một số vấn đề thực tế liên quan đến xác suất có điều kiện có bối cảnh thống kê.
 - Phân biệt được xác suất của biến cố $P(A)$, xác suất của biến cố giao $P(AB)$, và xác suất có điều kiện $P(A|B)$.
 - Nhận ra tính đúng, sai của một câu trả lời cho một câu hỏi liên quan đến xác suất có điều kiện trong bối cảnh toán học hoặc thực tế.
- **Các chỉ báo liên quan đến kiểu kiến thức nội dung đặc thù (SCK)**
 - Bình luận, lý giải về tính đúng, sai của các câu trả lời của học sinh liên quan đến xác suất có điều kiện, xác suất của biến cố, xác suất của biến cố giao, tính độc lập của các biến cố.

- Sử dụng một hoặc đa dạng biểu diễn toán học hoặc liên kết các loại biểu diễn toán học khác nhau như sơ đồ cây, bảng hai chiều, giản đồ Venn để giúp người học hiểu được bản chất và ý nghĩa của xác suất có điều kiện.

- Hiểu được ý nghĩa của xác suất có điều kiện trong các bối cảnh thực tế đa dạng để giúp người học đưa ra các quyết định khi giải quyết vấn đề.

- ***Các chỉ báo liên quan đến kiểu kiến thức về việc học (KCS)***

- Dự đoán được suy nghĩ hay con đường nhận thức của học sinh khi tiếp cận các vấn đề liên quan đến xác suất có điều kiện.

- Dự đoán được các câu trả lời có thể có của học sinh khi các em giải quyết các vấn đề toán học liên quan đến xác suất có điều kiện.

- Dự đoán khó khăn, sai lầm, hiểu nhầm khái niệm của học sinh khi thực hiện một nhiệm vụ học tập hoặc giải quyết một vấn đề liên quan đến xác suất có điều kiện.

- ***Các chỉ báo liên quan đến kiểu kiến thức về việc dạy (KCT)***

- Lựa chọn phương pháp dạy học, kỹ thuật dạy học và công cụ công nghệ phù hợp để dạy học xác suất có điều kiện.

- Lựa chọn các tình huống để giúp học sinh nắm được bản chất và phân biệt được xác suất có điều kiện, xác suất của biến cố giao và xác suất của biến cố độc lập.

- Sử dụng biểu diễn trực quan thích hợp để minh họa nội dung công thức xác suất có điều kiện, xác suất toàn phần và công thức Bayes nhằm giúp người học nắm bắt được bản chất của các công thức đó.

- Thiết kế hoạt động hoặc chuỗi hoạt động để phát triển hiểu biết của học sinh về các khái niệm, công thức và tính chất liên quan đến xác suất có điều kiện.

- Thiết kế được các tình huống để khắc phục hiểu nhầm khái niệm và sai lầm cho người học liên quan đến xác suất có điều kiện.

Dựa vào khung lí thuyết về kiến thức toán để dạy học xác suất có điều kiện chúng tôi đã thiết kế các công cụ nghiên cứu và tìm hiểu sự thay đổi trong kiến thức nội dung chung, kiến thức nội dung đặc thù, kiến thức về việc học và kiến thức về việc dạy học xác suất có điều kiện của giáo viên toán qua một khóa học về phát triển nghiệp vụ.

3. Phương pháp nghiên cứu

3.1. Thiết kế và đối tượng tham gia nghiên cứu

Đối tượng tham gia vào nghiên cứu gồm 40 giáo viên toán của khóa cao học K31, chuyên ngành Lý luận và Phương pháp dạy học bộ môn Toán của trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế. Các giáo viên này đã học xác suất có điều kiện trong học phần xác suất thuộc chương trình cử nhân sư phạm toán. Vì thế, họ được trang bị đầy đủ các kiến thức về xác suất có điều kiện trước khi tham gia chương trình cao học chuyên ngành Lý luận và Phương pháp dạy học bộ môn Toán. Các giáo viên toán tham gia vào nghiên cứu này có kinh nghiệm dạy học toán từ 1 đến 24 năm.

Nghiên cứu này được tiến hành trong khuôn khổ của học phần “*Phát triển chuyên môn cho giáo viên toán*” thuộc chương trình cao học chuyên ngành Lý luận và Phương pháp dạy học bộ môn Toán năm học 2023-2024. Học phần “*Phát triển chuyên môn cho giáo viên toán*” trang bị cho học viên cao học những hiểu biết chuyên sâu về kiến thức toán để dạy học, thực hành dạy học toán và hoạt động phát triển nghiệp vụ cho giáo viên toán. Học viên thực hành phân tích các đặc trưng và cụ thể hóa các mô hình kiến thức toán để dạy học vào các chủ đề toán cụ thể; nắm bắt được đặc trưng của các thực hành dạy học toán hiệu quả và thiết kế kế hoạch bài dạy một số chủ đề toán trong chương trình trung học phổ thông theo hướng phát triển năng lực người học. Chủ đề xác suất có điều kiện đã được lựa chọn để minh họa khi tổ chức dạy học hai chương trong học phần “*Phát triển chuyên môn cho giáo viên toán*” là chương “*Kiến thức toán để dạy học*” và chương “*Phân tích thực hành dạy học toán*”. Để đánh giá sự tiến triển trong kiến thức để dạy học xác suất có điều kiện của giáo viên toán sau khi tham gia khóa học, chúng tôi đã thiết kế dạy học hai chương này trong 6 buổi học của năm học 2023-2024 như sau:

Bảng 3.1. Nội dung can thiệp thực nghiệm

Thời gian	Nội dung	Hình thức
Buổi 1	Giảng viên giới thiệu với học viên nội dung và yêu cầu của học phần “ <i>Phát triển chuyên môn cho giáo viên toán</i> ”, chia lớp học thành 8 nhóm và sau đó giới thiệu mô hình kiến thức toán để dạy học.	Học tập toàn lớp.
	Khảo sát đầu vào với học viên tham gia khóa học gồm bốn tình huống liên quan đến kiến thức nội dung chung, kiến thức nội dung đặc thù, kiến thức về việc học, kiến thức về việc dạy xác suất có điều kiện.	Học viên làm khảo sát cá nhân.

Buổi 2	Yêu cầu các nhóm học viên cụ thể hóa mô hình kiến thức toán để dạy học vào chủ đề xác suất có điều kiện. Yêu cầu học viên tìm hiểu và phân loại hiểu nhầm khái niệm của học sinh liên quan đến xác suất có điều kiện.	Học viên làm việc nhóm và báo cáo kết quả bằng file trình chiếu. Học viên làm việc nhóm và báo cáo kết quả bằng file trình chiếu.
Buổi 3	Các nhóm tìm hiểu các nội dung xác suất có điều kiện được trình bày trong sách giáo khoa Cánh diều, Kết nối tri thức với cuộc sống, Chân trời sáng tạo. Sau đó, các nhóm báo cáo các nội dung liên quan đến đặc trưng hình thức, cách tiếp cận các khái niệm và công thức trong chủ đề xác suất có điều kiện.	Học viên làm việc nhóm và báo cáo kết quả bằng file trình chiếu.
Buổi 4	Các học viên trong từng nhóm thảo luận và soạn 2 kế hoạch bài dạy trong chủ đề xác suất có điều kiện: Bài 1. Xác suất có điều kiện; Bài 2: Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes.	Học viên làm việc nhóm, nộp sản phẩm file word kế hoạch bài dạy.
Buổi 5	Giảng viên lựa chọn 3 trong 8 kế hoạch bài dạy thứ nhất và yêu cầu học viên trình bày kế hoạch bài dạy. Các nhóm sẽ phân tích, nhận xét kế hoạch bài dạy vừa được trình bày để đúc rút kinh nghiệm. Giảng viên là người nhận xét cuối cùng về chất lượng của các kế hoạch bài dạy và đề xuất các chỉnh sửa cần thiết.	Học tập toàn lớp.
Buổi 6	Giảng viên lựa chọn 3 trong 8 kế hoạch bài dạy thứ hai và yêu cầu học viên trình bày kế hoạch bài dạy. Các nhóm sẽ phân tích, nhận xét kế hoạch bài dạy vừa được trình bày để đúc rút kinh nghiệm. Giảng viên là người nhận xét cuối cùng về chất lượng của các kế hoạch bài dạy và đề xuất các chỉnh sửa cần thiết. Khảo sát đầu ra với học viên tham gia khóa học	Học tập toàn lớp.

	gồm bốn tình huống liên quan đến kiến thức nội dung chung, kiến thức nội dung đặc thù, kiến thức về việc học, kiến thức về việc dạy xác suất có điều kiện.	Học viên làm bài khảo sát cá nhân.
--	--	------------------------------------

Kết quả bài làm phiếu khảo sát đầu vào và đầu ra được dùng để xem xét mức độ tiến triển kiến thức để dạy học xác suất có điều kiện của giáo viên toán tham gia vào nghiên cứu. Bên cạnh đó, các phản hồi của giáo viên cũng được sử dụng để chỉ ra sự thay đổi trong kiến thức để dạy học xác suất có điều kiện của các giáo viên sau khóa học.

3.2. Công cụ nghiên cứu

Hai phiếu khảo sát trước và sau thực nghiệm đã được sử dụng để đánh giá sự tiến triển về bốn lĩnh vực kiến thức toán để dạy học của giáo viên toán là kiến thức nội dung chung, kiến thức nội dung đặc thù, kiến thức về việc học và kiến thức về việc dạy học xác suất có điều kiện. Nghiên cứu đã sử dụng hai phiên bản khảo sát đầu vào và khảo sát đầu ra tương đương nhau về nội dung nhưng khác bối cảnh. Việc sử dụng bối cảnh khác trong phiếu khảo sát đầu vào và đầu ra nhằm tránh thiên lệch xảy ra trong quá trình khảo sát. Bảng sau mô tả tóm tắt bối cảnh của bốn nhiệm vụ trong phiếu khảo sát đầu vào và phiếu khảo sát đầu ra:

Bảng 3.2. Mô tả tóm tắt bối cảnh của các nhiệm vụ trong phiếu khảo sát đầu vào và đầu ra

Nhiệm vụ	Phiếu khảo sát đầu vào	Phiếu khảo sát đầu ra
Nhiệm vụ 1	Rút thăm trúng thưởng	Rút thăm phiếu mua hàng giảm giá
Nhiệm vụ 2	Vấn đề dương tính và âm tính giả trong y học	Mối liên hệ giữa bệnh tiểu đường và cao huyết áp
Nhiệm vụ 3	Tính công bằng trong trò chơi may rủi (bốc bi)	Bài toán Monty Hall
Nhiệm vụ 4	Biểu diễn trực quan công thức xác suất toàn phần	Biểu diễn trực quan công thức Bayes

Việc so sánh kết quả trước và sau thực nghiệm cho phép xác định những thay đổi trong 4 lĩnh vực kiến thức để dạy học xác suất có điều kiện của các giáo viên toán sau khi học xong học phần “*Phát triển chuyên môn cho giáo viên toán*”.

Dựa vào sự phân loại các kiểu kiến thức trong mô hình MKT và bộ chỉ báo đánh giá các kiểu kiến thức để dạy học chủ đề xác suất có điều kiện, chúng tôi thiết kế công cụ nghiên cứu là các nhiệm vụ liên quan đến khái niệm và công thức xác suất có điều kiện, công thức nhân xác suất, công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes. Sau đây là bảng mô tả các kiểu kiến

thức để dạy học xác suất có điều kiện với 4 nhiệm vụ nêu ra trong phiếu khảo sát đầu vào và đầu ra:

Bảng 3.3. Các kiểu kiến thức được đo lường trong phiếu khảo sát đầu vào và đầu ra

Kiểu kiến thức	Phiếu khảo sát đầu vào	Phiếu khảo sát đầu ra
Kiến thức nội dung phổ biến (CCK)	1.1; 2.1; 3.1	1.1; 2.1; 3.1
Kiến thức nội dung đặc thù (SCK)	1.2; 2.2; 3.2	1.2; 2.2; 3.2
Kiến thức về việc học (KCS)	1.3; 2.3; 3.3	1.3; 2.3; 3.3
Kiến thức về việc dạy (KCT)	1.4; 2.4; 3.4; 4	1.4; 2.4; 3.4; 4

Nội dung nhiệm vụ 1 trong phiếu khảo sát đầu ra cùng với thang đánh giá sẽ được trình bày nhằm minh họa cách mã hóa dữ liệu trong khuôn khổ bài viết này.

Bài toán 1: Ba người cùng vào một cửa hàng điện tử và mỗi người muốn mua 1 chiếc điện thoại Iphone 15 nhân dịp cửa hàng đang chạy chương trình giảm giá cuối năm. Cửa hàng chỉ còn lại hai chiếc điện thoại Iphone 15 được giảm giá 10%. Để không làm mất lòng khách hàng người bán hàng đã đưa ra 3 phiếu mua hàng giống nhau trong hộp kín, trong đó có hai phiếu được giảm giá. Ba khách hàng lần lượt rút mỗi người một phiếu và không hoàn lại. Khách hàng nào rút được phiếu mua hàng giảm giá thì sẽ được mua Iphone 15 giảm giá 10%. Theo bạn cách làm này có công bằng với ba khách hàng hay không? Vì sao?

1.1. Anh (chị) hãy giải bài toán trên bằng hai cách khác nhau.

1.2. Giả sử có ba học sinh đưa ra 3 cách giải quyết vấn đề như sau. Anh (chị) hãy đánh giá tính phù hợp trong cách xử lý vấn đề của học sinh và giải thích lí do.

Học sinh 1: Cách làm này không công bằng với ba người chơi vì xác suất rút được phiếu mua hàng giảm giá phụ thuộc vào thứ tự rút thăm. Người rút lần đầu tiên có xác suất rút trúng phiếu mua hàng giảm giá cao nhất là $P(A_1) = \frac{2}{3}$. Lúc đó tổng xác suất của người rút phiếu lần thứ hai và thứ ba rút được phiếu mua hàng giảm giá là $P(A_2) + P(A_3) = \frac{1}{3}$. Do đó xác suất rút được phiếu mua hàng giảm giá của ba khách hàng là không giống nhau.

Học sinh 2: Xác suất trúng được phiếu mua hàng giảm giá của người rút đầu tiên là $P(A_1) = \frac{2}{3}$. Khi người thứ nhất rút được phiếu mua hàng giảm giá thì còn lại hai phiếu mua hàng trong đó có một phiếu giảm giá nên xác suất rút được phiếu mua hàng giảm giá của người thứ hai và

thứ ba là như nhau $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$. Do đó xác suất rút được phiếu mua hàng giảm giá của ba khách hàng là không giống nhau nên cách làm này không công bằng đối với ba khách hàng.

Học sinh 3: Cách làm này là công bằng với cả 3 khách hàng vì xác suất rút được phiếu mua hàng giảm giá của ba người là như nhau:

$$P(A_1) = \frac{2}{3}; P(A_2) = P(A_1)P(A_2 | A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2 | \bar{A}_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3};$$

$$P(A_3) = P(A_1 A_2)P(A_3 | A_1 A_2) + P(A_1 \bar{A}_2)P(A_3 | A_1 \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 A_2)P(A_3 | \bar{A}_1 A_2) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Như vậy, $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3)$.

1.3. Theo anh (chị) học sinh sẽ gặp sai lầm nào khi giải bài toán trên? Nguyên nhân của những sai lầm đó là gì?

1.4. Một học sinh lớp 12 gặp khó khăn trong việc giải bài toán trên, anh (chị) hãy đưa ra các minh họa trực quan phù hợp để giúp học sinh đó hiểu được lời giải bài toán.

3.3. Thang điểm đánh giá

Một thang đánh giá gồm 4 mức độ từ 0 - 3 điểm cho từng câu hỏi trong mỗi nhiệm vụ cũng được xây dựng nhằm đo lường kiến thức để dạy học xác suất có điều kiện của giáo viên toán tham gia vào nghiên cứu. Bảng sau mô tả thang đánh giá kiến thức để dạy học xác suất có điều kiện đối với nhiệm vụ trên.

Bảng 3.4. Minh họa thang đánh giá kiến thức để dạy học xác suất có điều kiện

Câu	Mức	Mô tả
1.1	3	Cho biết cách làm của nhân viên bán hàng là công bằng với ba khách hàng vì xác suất rút trúng phiếu mua hàng giảm giá của mỗi người sẽ là $\frac{2}{3}$ bằng cả hai cách là sử dụng sơ đồ cây và xác suất có điều kiện hoặc bảng liệt kê và xác suất cổ điển để tính xác suất rút được phiếu mua hàng giảm giá của mỗi khách hàng.
	2	Cho biết cách làm của nhân viên bán hàng là công bằng với ba khách hàng vì xác suất rút được phiếu mua hàng giảm giá của mỗi người sẽ là $\frac{2}{3}$ chỉ bằng một trong hai cách là sử dụng sơ đồ cây và xác suất có điều kiện hoặc sử dụng bảng liệt kê và xác suất cổ điển.
	1	Cho biết cách làm của nhân viên bán hàng là công bằng với ba khách hàng vì

		xác suất rút trúng phiếu mua hàng giảm giá của mỗi người sẽ là $\frac{2}{3}$ nhưng lập luận toán học chưa chặt chẽ khi tính xác suất này.
	0	Cho rằng cách làm của nhân viên bán hàng không công bằng đối với khách hàng vì người rút đầu tiên có tỉ lệ rút được phiếu giảm giá cao hơn hai người còn lại.
1.2	3	Đánh giá được tính đúng đắn của câu trả lời của cả 3 học sinh về tính công bằng của việc rút được phiếu mua hàng giảm giá.
	2	Đánh giá được tính đúng đắn của câu trả lời của 2 trong 3 học sinh về tính công bằng của việc rút được phiếu mua hàng giảm giá.
	1	Đánh giá được tính đúng đắn của câu trả lời của 1 trong 3 học sinh về tính công bằng của việc rút được phiếu mua hàng giảm giá.
	0	Không đánh giá được tính đúng đắn của bất kì câu trả lời nào của 3 học sinh về tính công bằng của việc rút được phiếu mua hàng giảm giá.
1.3	3	Chỉ ra được sai lầm phổ biến của học sinh khi cho rằng cách xử lí vấn đề bằng rút thăm phiếu mua hàng giảm giá là không công bằng với người chơi, nguyên nhân dẫn đến sai lầm là dựa vào tính may rủi hoặc hiểu nhầm về trình tự thời gian.
	2	Chỉ ra được sai lầm phổ biến của học sinh khi cho rằng cách xử lí vấn đề bằng rút thăm phiếu mua hàng giảm giá là không công bằng với khách hàng, nguyên nhân dẫn đến ý kiến này của học sinh là vì các em hiểu nhầm về trình tự thời gian.
	1	Chỉ ra được sai lầm phổ biến của học sinh khi cho rằng cách xử lí vấn đề bằng rút thăm phiếu mua hàng giảm giá là không công bằng với khách hàng, nguyên nhân dẫn đến ý kiến này của học sinh là vì các em tin rằng việc rút thăm mang tính may rủi.
	0	Không chỉ ra được bất kì sai lầm nào mà học sinh mắc phải khi xét tính công bằng của việc rút thăm phiếu mua hàng giảm giá.
1.4	3	Đưa ra được 2 cách minh họa trực quan cơ hội rút được phiếu mua hàng giảm giá của từng người và trường hợp sử dụng mỗi cách tiếp cận: gợi ý học sinh sử dụng sơ đồ cây để biểu diễn trực quan xác suất rút được phiếu giảm giá của từng người, sau đó tính xác suất rút được phiếu mua hàng giảm giá của từng người đối với học sinh có sức học khá và tốt để tiết kiệm thời gian xử lí vấn đề, hoặc yêu cầu học sinh sử dụng bảng để liệt kê các trường hợp

		rút được phiếu mua hàng giảm giá của từng người đối với các em gặp khó khăn trong việc xử lý các vấn đề xác suất liên quan đến trình tự thời gian.
	2	Gợi ý học sinh sử dụng bảng để liệt kê các trường hợp rút được phiếu giảm giá của từng người. Sau đó sử dụng kết quả từ bảng để tính xác suất rút được phiếu mua hàng giảm giá của từng người.
	1	Gợi ý học sinh sử dụng sơ đồ cây để biểu diễn trực quan xác suất rút được phiếu giảm giá của từng người, sau đó dùng xác suất có điều kiện để tính xác suất rút được phiếu mua hàng giảm giá của từng người.
	0	Không đưa ra bất kỳ gợi ý nào về mặt dạy học hoặc gợi ý không có ý nghĩa thúc đẩy học sinh tiếp cận cách giải quyết bài toán một cách trực quan.

Chúng tôi quy ước các mức độ 0 - 3 trong kiến thức để dạy học xác suất có điều kiện của giáo viên tương ứng với 0 - 3 điểm. Điểm CCK, SCK, KCS, KCT thể hiện qua bài làm của giáo viên trong phiếu khảo sát được đánh giá theo cách tính điểm trung bình cộng. Điểm MKT của mỗi giáo viên được tính bằng cách lấy tổng các điểm CCK, SCK, KCS và KCT. Chúng tôi sử dụng kiểm định theo cặp t-Test Paired Two Sample for Means trong Excel 2019 để xem xét có sự khác biệt có ý nghĩa thống kê giữa điểm CCK, SCK, KCS, KCT và MKT của mỗi giáo viên thể hiện trong phiếu khảo sát đầu vào và đầu ra hay không.

4. Kết quả nghiên cứu

Chúng tôi sẽ phân tích sự thay đổi trong từng loại kiến thức để dạy học xác suất có điều kiện của các giáo viên toán tham gia vào nghiên cứu dựa vào các thông số thống kê mô tả thu được từ phiếu khảo sát trước và sau can thiệp thực nghiệm. Sau đó, chúng tôi sẽ chỉ ra sự tiến triển về kiến thức để dạy học xác suất có điều kiện của các giáo viên qua can thiệp thực nghiệm là có ý nghĩa thống kê hay không. Các phản ánh của giáo viên sau khi tham gia khóa học cũng được lựa chọn để làm rõ sự thay đổi kiến thức để dạy học xác suất có điều kiện của giáo viên trước và sau khi tham gia khóa học.

4.1. Sự tiến triển kiến thức nội dung để dạy học xác suất có điều kiện

Bảng sau thể hiện các số liệu thống kê mô tả điểm trung bình của kiến thức nội dung chung và kiến thức nội dung đặc thù để dạy học xác suất có điều kiện của các giáo viên toán tham gia vào nghiên cứu:

Bảng 4.1. Điểm trung bình kiến thức nội dung để dạy học xác suất có điều kiện

Kiến thức nội dung để dạy học xác suất có điều kiện	Trước thực nghiệm (n = 40)	Sau thực nghiệm (n = 40)
Kiến thức nội dung chung (CCK)	2,16	2,65
Kiến thức nội dung đặc thù (SCK)	2,15	2,63

Số liệu từ bảng 4.1. cho thấy điểm trung bình kiến thức nội dung chung CCK sau can thiệp thực nghiệm là 2,65, đã tăng lên 0,49 điểm so với trước tác động là 2,16. Câu hỏi đặt ra là liệu sự cải thiện này thực sự có ý nghĩa thống kê hay chỉ là do ngẫu nhiên. Để trả lời câu hỏi này, chúng tôi đã sử dụng kiểm định theo cặp t-Test Paired Two Sample for Means trong Excel 2019 để kiểm định sự khác nhau theo cặp của điểm CCK của giáo viên trước và sau khi can thiệp. Kết quả kiểm định sự khác nhau theo cặp điểm CCK của giáo viên trước và sau khi can thiệp thực nghiệm được trình bày ở bảng 4.2:

Bảng 4.2. Kết quả kiểm định sự khác nhau theo cặp của điểm CCK

<i>Các thông số thống kê</i>	<i>CCK-Pre</i>	<i>CCK-Pos</i>
Trung bình	2,16	2,65
Phương sai	0,131692	0,168718
Cỡ mẫu	40	40
Hệ số tương quan	0,328555	
Chênh lệch trung bình giả thuyết	0	
Bậc tự do df	39	
Giá trị thống kê t	-6,88739	
P(T<=t) một phía	1,53E-08	
Giá trị tới hạn t một phía	1,684875	
P(T<=t) hai phía	3,06E-08	
Giá trị tới hạn t một phía	2,022691	

Kết quả kiểm định thu được ở bảng 4.2 cho thấy $P(T \leq t)$ một phía $< 0,05$ nên kết luận là có sự khác biệt có ý nghĩa thống kê về điểm CCK theo cặp của mỗi giáo viên trước và sau can thiệp, cụ thể điểm CCK của giáo viên sau can thiệp cao hơn trước can thiệp với mức ý nghĩa 0,05.

Bên cạnh sự tiến triển về kiến thức nội dung chung, dữ liệu từ bảng 4.1 cũng cho thấy điểm trung bình của kiến thức nội dung đặc thù về xác suất có điều kiện của giáo viên tham gia vào nghiên cứu đã tăng 0,48 điểm, từ 2,15 điểm SCK trước thực nghiệm lên 2,63 điểm SCK sau thực nghiệm. Để kiểm tra xem sự cải thiện về điểm SCK có ý nghĩa thống kê hay không, chúng tôi đã sử dụng kiểm định theo cặp t-Test Paired Two Sample for Means trong Excel 2019 để kiểm định sự khác nhau theo cặp của điểm SCK của giáo viên trước và sau can thiệp. Kết quả kiểm định sự khác nhau theo cặp của điểm SCK của giáo viên trước và sau can thiệp được trình bày ở bảng 4.3:

Bảng 4.3. Kết quả kiểm định sự khác nhau theo cặp của điểm SCK

<i>Các thông số thống kê</i>	<i>SCK-Pre</i>	<i>SCK-Pos</i>
Trung bình	2,15	2,63
Phương sai	0,249737	0,319994
Cỡ mẫu	40	40
Hệ số tương quan	0,52134	
Chênh lệch trung bình giả thuyết	0	
Bậc tự do df	39	
Giá trị thống kê t	-5,78929	
P(T<=t) một phía	5,08E-07	
Giá trị tới hạn t một phía	1,684875	
P(T<=t) hai phía	1,02E-06	
Giá trị tới hạn t một phía	2,022691	

Kết quả kiểm định ở bảng 4.3 thu được $P(T \leq t)$ một phía $< 0,05$. Điều đó cho thấy có sự khác biệt có ý nghĩa thống kê trong việc cải thiện kiến thức nội dung đặc thù SCK của giáo viên toán theo chiều tăng lên sau can thiệp thực nghiệm.

4.2. Sự tiến triển kiến thức nội dung sự phạm để dạy học xác suất có điều kiện

Dữ liệu thu được cho thấy sự thay đổi điểm kiến thức nội dung sự phạm để dạy học xác suất có điều kiện của các giáo viên toán trước và sau khóa học. Thông qua quá trình làm việc hợp tác với bạn học và giảng viên để tìm hiểu việc dạy học chủ đề xác suất có điều kiện, kiến thức về việc học và kiến thức về việc dạy học xác suất có điều kiện của các giáo viên toán tham gia vào nghiên cứu đã có sự tiến triển rõ rệt. Bảng 4.4 mô tả điểm trung bình của kiến thức về

việc học và kiến thức về việc dạy xác suất có điều kiện của giáo viên trước và sau can thiệp thực nghiệm:

Bảng 4.4. Điểm trung bình kiến thức nội dung sự phạm để dạy học xác suất có điều kiện

Kiến thức nội dung sự phạm để dạy học xác suất có điều kiện	Trước thực nghiệm (n = 40)	Sau thực nghiệm (n = 40)
Kiến thức về việc học (KCS)	2,12	2,55
Kiến thức về việc dạy (KCT)	2,08	2,43

Cụ thể, số liệu về điểm trung bình của kiến thức về việc học KCS của giáo viên toán đã tăng từ 2,12 điểm trước thực nghiệm lên 2,55 điểm sau thực nghiệm. Điểm trung bình KCS của các giáo viên tham gia vào nghiên cứu đã tăng 0,43 điểm sau can thiệp thực nghiệm. Để xem xét sự cải thiện điểm KCS của giáo viên toán tham gia vào nghiên cứu có ý nghĩa thống kê hay không, chúng tôi đã sử dụng kiểm định theo cặp t-Test Paired Two Sample for Means trong Excel 2019 để kiểm định sự khác nhau theo cặp của điểm KCS của giáo viên toán trước và sau can thiệp thực nghiệm. Kết quả kiểm định sự khác nhau về điểm KCS của giáo viên toán theo cặp trước và sau can thiệp thực nghiệm được mô tả ở bảng sau:

Bảng 4.5. Kết quả kiểm định sự khác nhau theo cặp của điểm KCS

Các thông số thống kê	KCS-Pre	KCS-Pos
Trung bình	2,12	2,55
Phương sai	0,161481	0,257429
Cỡ mẫu	40	40
Hệ số tương quan	0,248158	
Chênh lệch trung bình giả thuyết	0	
Bậc tự do df	39	
Giá trị thống kê t	-4,88088	
P(T<=t) một phía	9,11E-06	
Giá trị tới hạn t một phía	1,684875	
P(T<=t) hai phía	1,82E-05	
Giá trị tới hạn t một phía	2,022691	

Kết quả kiểm định sự khác nhau theo cặp của điểm KCS của giáo viên trước và sau can thiệp thu được $P(T \leq t)$ một phía $< 0,05$. Điều đó cho thấy có sự khác biệt có ý nghĩa thống kê về điểm KCS theo cặp của mỗi giáo viên trước và sau can thiệp theo chiều hướng điểm KCS của giáo viên sau khóa học cao hơn trước khóa học với mức ý nghĩa 0,05.

Bên cạnh sự chuyển biến kiến thức về việc học, kiến thức về việc dạy học xác suất có điều kiện của giáo viên cũng có sự thay đổi đáng kể. Bảng 4.4 cho thấy sự tiến triển trong kiến thức về việc dạy của giáo viên trước và sau can thiệp, tăng từ 2,08 điểm trước thực nghiệm lên 2,43 điểm sau thực nghiệm. Điểm trung bình KCT của giáo viên tăng 0,35 điểm sau can thiệp. Kiểm định theo cặp t-Test Paired Two Sample for Means trong Excel 2019 để kiểm định sự khác nhau theo cặp của điểm KCT của giáo viên trước và sau khi can thiệp cho kết quả ở bảng sau:

Bảng 4.6. Kết quả kiểm định sự khác nhau theo cặp của điểm KCT

<i>Các thông số thống kê</i>	<i>KCT-Pre</i>	<i>KCT-Pos</i>
Trung bình	2,08	2,43
Phương sai	0,150641	0,195378
Cỡ mẫu	40	40
Hệ số tương quan	0,418115	
Chênh lệch trung bình giả thuyết	0	
Bậc tự do df	39	
Giá trị thống kê t	-4,95353	
$P(T \leq t)$ một phía	7,25E-06	
Giá trị tới hạn t một phía	1,684875	
$P(T \leq t)$ hai phía	1,45E-05	
Giá trị tới hạn t một phía	2,022691	

Kết quả kiểm định sự khác nhau theo cặp điểm KCT của giáo viên trước và sau can thiệp cho thấy $P(T \leq t)$ một phía $< 0,05$. Điều đó đưa đến kết luận là có sự khác biệt có ý nghĩa thống kê về điểm KCT theo cặp của mỗi giáo viên theo chiều hướng tăng lên sau khóa học.

4.3. Sự tiến triển kiến thức để dạy học xác suất có điều kiện

Dữ liệu thu được cho thấy từng thành phần của kiến thức để dạy học xác suất có điều kiện của giáo viên đã được cải thiện sau can thiệp thực nghiệm. Trong đó, kiến thức nội dung chung tăng nhiều nhất là 0,49 điểm, tiếp đến là kiến thức nội dung đặc thù tăng 0,48 điểm. Kiến thức về việc học cũng tăng 0,43 điểm và kiến thức về việc dạy tăng ít nhất là 0,35 điểm. Sự tiến

triển của các loại kiến thức thành phần để dạy học xác suất có điều kiện của giáo viên toán tham gia vào nghiên cứu là có ý nghĩa thống kê. Điểm trung bình MKT của các giáo viên tham gia vào khóa học đã tăng 1,76 điểm, từ 8,50 điểm trước thực nghiệm lên 10,26 điểm sau thực nghiệm.

Sau khi kiểm định sự khác nhau theo cặp từng loại điểm của mỗi kiểu kiến thức thành phần để dạy học xác suất có điều kiện của giáo viên trước và sau khi can thiệp, chúng tôi tiến hành kiểm định sự khác nhau theo cặp điểm kiến thức để dạy học xác suất có điều kiện của giáo viên trước và sau thực nghiệm. Kết quả kiểm định thu được ở bảng số liệu sau:

Bảng 4.7. Kết quả kiểm định sự khác biệt theo cặp của điểm MKT

<i>Các thông số thống kê</i>	<i>MKT-Pre</i>	<i>MKT-Pos</i>
Trung bình	8,50	10,26
Phương sai	2,235385	2,858404
Cỡ mẫu	40	40
Hệ số tương quan	0,391243	
Chênh lệch trung bình giả thuyết	0	
Bậc tự do df	39	
Giá trị thống kê t	-6,29706	
$P(T \leq t)$ một phía	1E-07	
Giá trị tới hạn t một phía	1,684875	
$P(T \leq t)$ hai phía	2E-07	
Giá trị tới hạn t một phía	2,022691	

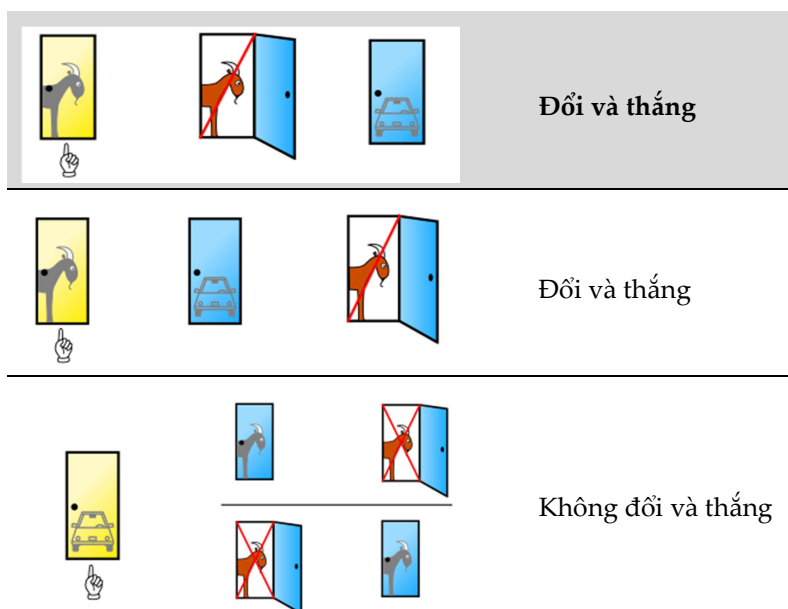
Kết quả kiểm định theo cặp của điểm MKT của giáo viên trước và sau can thiệp cho thấy $P(T \leq t)$ một phía $< 0,05$ nên kết luận là có sự khác biệt có ý nghĩa thống kê về điểm MKT theo cặp của mỗi giáo viên trước và sau can thiệp. Điểm MKT của giáo viên sau can thiệp cao hơn trước can thiệp với mức ý nghĩa 0,05. Điều này cho thấy kiến thức để dạy học xác suất có điều kiện của giáo viên toán tham gia vào nghiên cứu đã có sự chuyển biến tích cực.

Sự tiến triển về kiến thức để dạy học xác suất có điều kiện của giáo viên toán tham gia vào nghiên cứu xuất phát từ quá trình làm việc hợp tác với bạn học để thiết kế kế hoạch bài dạy. Các thành viên trong nhóm có cơ hội thảo luận các cách tiếp cận khác nhau để giải quyết vấn đề nhằm phát triển kiến thức nội dung chung và kiến thức nội dung đặc thù. Chẳng hạn với bài toán nổi tiếng Monty Hall: “Giả sử bạn đứng trước ba ô cửa, trong đó có 2 ô cửa chứa dê

và một ô cửa chứa xe hơi. Bạn mong muốn mở trúng ô cửa có chiếc xe để được nhận nó (nếu mở trúng ô cửa có dê thì bạn phải rinh nó về nhà). Monty yêu cầu bạn chọn một trong ba ô cửa. Monty sẽ giúp bạn loại trừ một đáp án sai bằng cách mở một ô cửa có dê trong hai ô cửa còn lại (dĩ nhiên ông ta đã biết mỗi ô cửa có gì). Sau đó bạn được lựa chọn lần 2 là giữ nguyên ô cửa ban đầu hay đổi sang ô cửa còn lại chưa được lật mở? Hãy giải thích quyết định của bạn”. Một giáo viên trẻ tên K đã chia sẻ rằng:

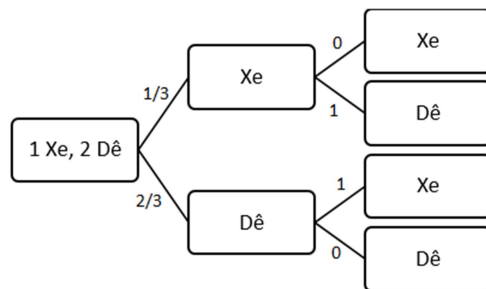
“Mặc dù biết sau khi người dẫn chương trình mở ra một ô cửa chứa con dê, nếu người chơi chọn đổi ô cửa thì xác suất trúng xe ô tô là $\frac{2}{3}$ nhưng bản thân vẫn chưa giải thích được lí do vì sao xác suất đó lại ra như thế. Khi thảo luận với các bạn, bản thân mới biết được là có thể lí giải một cách trực quan dựa vào việc liệt kê các trường hợp có thể xảy ra hoặc sử dụng sơ đồ cây”.

Sau đây là hai cách lí giải xác suất trúng chiếc xe ô tô mà giáo viên K đã đề cập đến trong phản ánh trên. Cách thứ nhất là sử dụng phương án liệt kê:



Hình 4.1. Phương án liệt kê trường hợp để giải quyết bài toán Monty Hall

Phương án sử dụng minh họa trực quan bằng sơ đồ cây để tính xác suất trúng xe ô tô được giáo viên K đề cập trong trường hợp người chơi chọn một ô cửa và quyết định đổi ô cửa sau khi người dẫn chương trình đã lật ra một ô cửa chứa con dê như sau:



Hình 4.2. Phương án minh họa trực quan bằng sơ đồ cây để giải quyết bài toán Monty Hall

Việc phát triển được nhiều cách tiếp cận khác nhau để giải quyết vấn đề đã giúp các giáo viên tham gia vào khóa học tiếp thu được nhiều kiến thức bổ ích mà bản thân họ chưa tiếp cận được khi học ở trường sư phạm như phản ánh của giáo viên Q:

“Đây cũng là lần đầu tập dượt giảng dạy một chủ đề mới trong chương trình nên bản thân cảm thấy rất bối rối. Tuy nhiên các anh chị trong nhóm đã thảo luận cẩn thận các cách giải quyết vấn đề khác nhau của một vấn đề xác suất đã giúp tôi học hỏi rất nhiều. Đặc biệt có một số vấn đề trước đây bản thân tôi nghĩ chỉ có thể giải bằng xác suất có điều kiện thì nay đã học hỏi được cách giải mới là sử dụng xác suất cổ điển thông qua phương án liệt kê các trường hợp thuận lợi của biến cố như bài toán Monty Hall hay bài toán rút thăm phiếu mua hàng giảm giá”.

Bên cạnh sự tiến triển về kiến thức nội dung chung, việc hợp tác để phát triển các ý tưởng thiết kế kế hoạch bài dạy cũng giúp kiến thức nội dung đặc thù để dạy học xác suất có điều kiện của giáo viên tham gia vào khóa học tiến bộ. Cụ thể, các giáo viên đã phát triển được hiểu biết về sự kết nối của các dạng biểu diễn khác nhau khi xử lý các vấn đề xác suất có điều kiện. Chẳng hạn giáo viên H chia sẻ rằng:

“Trước đây bản thân chỉ tập trung vào các công thức khi giải quyết các vấn đề liên quan đến xác suất có điều kiện. Nhưng khi thảo luận với các anh chị và cô giáo mới thấy được vai trò quan trọng của biểu diễn trực quan như sơ đồ cây hoặc bảng hai chiều khi xử lý các vấn đề xác suất có điều kiện”.

Phản ánh của giáo viên sau khóa học cũng cho thấy kiến thức nội dung sư phạm đã phát triển sau can thiệp thực nghiệm. Giáo viên đã phát triển thói quen dự đoán suy nghĩ và phương án giải quyết vấn đề liên quan đến xác suất có điều kiện của học sinh. Đặc biệt, dự đoán các hiểu nhầm khái niệm khi giải quyết các vấn đề xác suất có điều kiện của học sinh được các giáo viên chú ý như chia sẻ của giáo viên Q:

“Với bài toán rút thăm trúng phiếu mua hàng giảm giá, học sinh có thể giải quyết bằng hai cách khác nhau là cách liệt kê trường hợp hoặc sử dụng sơ đồ cây. Các em có thể mắc phải một số hiểu nhầm khái niệm như hiểu nhầm về thứ tự thời gian khi cho rằng người rút phiếu lần đầu và lần 2 trúng phiếu giảm giá thì người thứ 3 sẽ không còn cơ hội trúng phiếu giảm giá nữa hoặc người rút thăm lần đầu sẽ có cơ hội trúng phiếu giảm giá cao hơn hai người còn lại, khi người rút đầu tiên trúng phiếu giảm giá thì”

hai người còn lại sẽ rút trúng phiếu giảm giá với xác suất là 50%. Ngoài ra một số học sinh sẽ mắc sai lầm khi cho rằng việc rút thăm là không công bằng vì nó mang tính hên xui”.

Với bài toán Monty Hall, giáo viên Q cũng cho rằng:

“Học sinh sẽ mắc sai lầm phổ biến khi cho rằng việc mở ra một ô cửa có chiếc xe mang yếu tố may rủi, do đó dù có đổi hay không đổi thì việc trúng được chiếc xe là do yếu tố may mắn quyết định. Các em cũng có thể hiểu nhầm là khi người dẫn chương trình mở ra một ô cửa chứa con dê thì hai ô cửa còn lại một ô sẽ chứa chiếc xe và ô kia chứa con dê nên xác suất để trúng chiếc xe là 50% do đó việc đổi ô cửa hay không không làm thay đổi xác suất trúng xe của người chơi”.

Ngoài việc học hỏi thêm kiến thức về việc học, việc thảo luận để thiết kế kế hoạch bài dạy và phân tích kế hoạch bài dạy đã giúp giáo viên tích lũy được các kiến thức liên quan đến việc dạy. Một trong các vấn đề được các giáo viên đề cập phổ biến nhất là việc lựa chọn tình huống mở đầu mang yếu tố thực tế để giúp người học hiểu được ý nghĩa của các kiến thức xác suất có điều kiện. Chẳng hạn giáo viên K đã viết trong báo cáo sau khóa học rằng:

“Tình huống mở đầu: Vấn đề đặt ra phải phù hợp với thực tế và có ý nghĩa. Nhận thấy việc giải thích cho bài toán Monty Hall quá khó đối với học sinh, ta có thể chuyển sang dạng trò chơi có thưởng. Ngoài ra, ta cũng có thể khảo sát trực tiếp học sinh về việc thích giày Adidas hoặc giày Nike. Sau đó có thể đặt câu hỏi “Biết bạn đó là nữ, xác suất để bạn đó thích giày Adidas là bao nhiêu?”, với câu hỏi này học sinh có thể trả lời được mà không dùng kiến thức mới về xác suất có điều kiện. Sau khi hình thành kiến thức, ta có thể vận dụng ví dụ mở đầu để đặt ra nhiều câu hỏi khác tương tự để kiểm tra học sinh”.

Giáo viên Q cũng đã gặt hái được những cách tiếp cận thực tế khác nhau khi giới thiệu khái niệm xác suất có điều kiện cho người học và cách kết nối chuỗi các hoạt động trong bài học một cách hiệu quả:

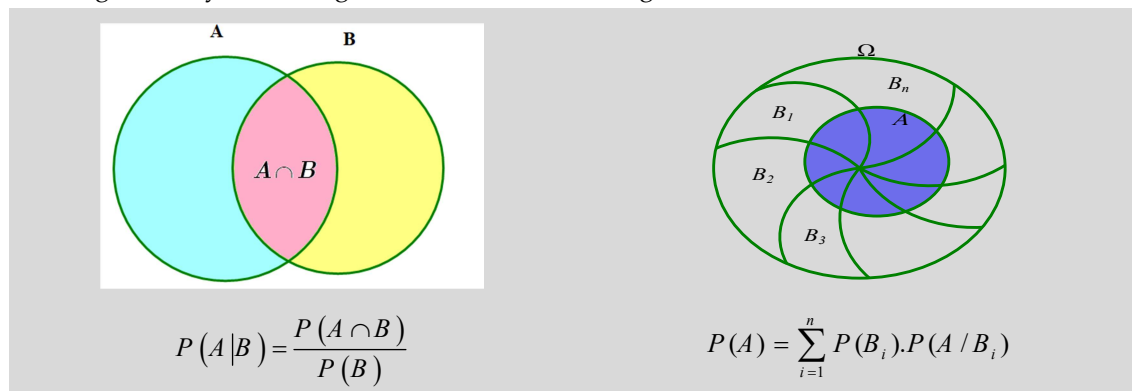
“Trong quá trình thảo luận về kế hoạch bài dạy nội dung xác suất có điều kiện, tôi đã lắng nghe được từ các anh/chị đồng nghiệp và cô giáo hướng dẫn các cách tiếp cận khác nhau cho hoạt động mở đầu. Chẳng hạn như: Thiết kế trò chơi “Ô cửa bí mật” để học sinh tự trải nghiệm; khảo sát sở thích giày Nike/Adidas; lấy ngẫu nhiên viên bi xanh/đỏ từ một hộp kín. Những gợi ý đó giúp tôi biết thêm nhiều cách để tiếp cận dạy học nội dung này, những phân tích trong quá trình thảo luận giúp đánh giá ưu và nhược điểm của mỗi hoạt động. Từ hoạt động mở đầu, ta có thể triển khai thêm nhiều bài toán từ hoạt động đó để dạy nội dung xác suất có điều kiện. Điều đó giúp liên kết các nội dung trong suốt bài dạy. Tôi cũng được nghe các tiếp cận tính xác suất có điều kiện bằng định nghĩa, bằng sơ đồ hình cây, bằng bảng 2×2 ”.

Giáo viên H lại tiếp nhận được những ưu và nhược điểm của mỗi cách tiếp cận xác suất có điều kiện để có cách xử lý phù hợp với bối cảnh lớp học:

“Trong dạy học xác suất có điều kiện, cách tiếp cận theo quan niệm cổ điển hay tần suất có thể chưa phù hợp. Trong hoạt động hình thành kiến thức, việc sử dụng công cụ Excel để hỗ trợ có nhiều ưu

điểm, bên cạnh đó cũng có một số nhược điểm, bao gồm việc thiếu máy tính, kỹ năng và đòi hỏi khá nhiều thời gian để thực hiện hoạt động mở đầu. Ngoài ra, hoạt động mở đầu cũng đòi hỏi phải thực tế, dễ thực hiện, học sinh dễ dàng tiếp cận để hình thành tri thức mới và có sự kết nối với các hoạt động tiếp theo. Việc sử dụng giản đồ Venn, sơ đồ cây và bảng 2×2 giúp học sinh dễ dàng phát hiện, nắm được dữ liệu và phân tích bài toán”.

Ngoài việc phát triển hiểu biết liên quan đến các cách tiếp cận xác suất có điều kiện và sự kết nối các hoạt động trong bài học, ý tưởng sử dụng công cụ trực quan như giản đồ Venn, sơ đồ cây và bảng hai chiều của giáo viên cũng được thúc đẩy qua quá trình làm việc hợp tác với bạn học để hoàn thành các yêu cầu của khóa học. Trong đó ý tưởng sử dụng giản đồ Venn để xây dựng công thức xác suất có điều kiện và công thức xác suất toàn phần được nhiều giáo viên đề cập như một kinh nghiệm dạy học mới đối với bản thân họ vì trước đây họ chỉ được tiếp cận các công thức này dưới dạng cho sẵn như chia sẻ của giáo viên H:



Hình 4.3. Minh họa trực quan công thức xác suất có điều kiện

Hình 4.4. Minh họa trực quan công thức xác suất toàn phần

Việc tiếp nhận minh họa trực quan của công thức xác suất có điều kiện và công thức xác suất toàn phần đã làm thay đổi ý tưởng về việc giảng dạy của giáo viên tham gia vào nghiên cứu. Từ việc chỉ giới thiệu trực tiếp công thức xác suất có điều kiện và công thức xác suất toàn phần cho học sinh như trước đây, giáo viên đã sử dụng các tình huống thực tế và minh họa trực quan bằng giản đồ Venn, bảng hai chiều và sơ đồ cây để khơi gợi và điều chỉnh suy đoán ban đầu của học sinh về xác suất của các biến cố và giúp các em nắm được bản chất của các công thức cơ bản của xác suất có điều kiện.

5. Thảo luận và kết luận

Kết quả phân tích dữ liệu thu được cho thấy có sự chuyển biến trong kiến thức để dạy học xác suất có điều kiện của giáo viên toán sau khóa học trên cả bốn lĩnh vực kiến thức cụ thể của mô hình MKT là kiến thức nội dung chung, kiến thức nội dung đặc thù, kiến thức về việc học và kiến thức về việc dạy. Sự tiến triển của bốn lĩnh vực kiến thức thành phần này đều có ý

nghĩa thống kê. Điều này bước đầu phản ánh ảnh hưởng tích cực của hoạt động can thiệp thực nghiệm lên kiến thức để dạy học xác suất có điều kiện của các giáo viên tham gia vào nghiên cứu. Chính môi trường học tập tương tác với trọng tâm là các hoạt động thiết kế và phân tích kế hoạch bài dạy đã tạo cơ hội để giáo viên phát triển kiến thức để dạy học xác suất có điều kiện. Trong quá trình hợp tác để thiết kế kế hoạch bài dạy, các giáo viên có cơ hội thảo luận và chia sẻ với nhau các ý tưởng giải toán, sử dụng công cụ trực quan như giản đồ Venn, sơ đồ cây, bảng hai chiều để hỗ trợ quá trình học sinh khám phá kiến thức liên quan đến xác suất có điều kiện cũng như giải quyết vấn đề thực tế. Chính môi trường sư phạm tương tác đã giúp giáo viên học hỏi thêm kiến thức để dạy học xác suất có điều kiện mà bản thân họ chưa được chuẩn bị đầy đủ khi còn là sinh viên trường sư phạm như phản ánh của Batanero (2022).

Kết quả nghiên cứu này cũng chỉ ra rằng việc cung cấp cho giáo viên toán môi trường làm việc hợp tác không chỉ giúp họ đào sâu các kiến thức nội dung về xác suất có điều kiện mà còn cả kiến thức nội dung sư phạm. Khi phân tích kế hoạch bài học các giáo viên chú ý nhiều hơn đến cách học sinh suy nghĩ để giải quyết vấn đề cũng như những sai lầm và hiểu nhầm khái niệm mà các em mắc phải. Bên cạnh đó, các giáo viên cũng tập trung làm rõ ý tưởng sư phạm và việc lựa chọn các nhiệm vụ học tập, đặc biệt là những nhiệm vụ học tập có bối cảnh thực tế để giúp người học hào hứng trong quá trình học tập khi thấy được ý nghĩa của các kiến thức xác suất liên quan. Sự kết nối của các hoạt động học tập cũng được giáo viên chú ý khi thảo luận về việc xây dựng kế hoạch bài dạy để giúp cho tiến trình kiến tạo tri thức xác suất có điều kiện của học sinh diễn ra một cách tự nhiên với sự hỗ trợ của các công cụ trực quan như giản đồ Venn, sơ đồ cây và bảng hai chiều. Điều đó cho thấy, môi trường làm việc hợp tác để thiết kế và phân tích kế hoạch bài dạy đã giúp giáo viên phát triển kiến thức nội dung sư phạm về xác suất có điều kiện. Kết quả này càng khẳng định vai trò của các tương tác sư phạm trong việc phát triển kiến thức để dạy học cho giáo viên toán đã được đề cập trong nghiên cứu của Nguyen và Tran (2023).

Xác suất có điều kiện là một chủ đề mới trong chương trình toán cấp trung học phổ thông ở Việt Nam. Do đó, việc dạy học chủ đề này gây ra không ít khó khăn với giáo viên toán, đặc biệt là giáo viên trẻ mới vào nghề như phản ánh của Díaz và cộng sự (2010). Kết quả nghiên cứu này chỉ ra rằng môi trường học tập mang tính tương tác thông qua quá trình hợp tác thảo luận, thiết kế và phân tích kế hoạch bài dạy trong một khóa học về phát triển nghiệp vụ đã giúp giáo viên phát triển kiến thức để dạy học xác suất có điều kiện. Điều này tiếp tục khẳng định đề xuất của Groth (2010) về việc phải tiếp tục tổ chức các khóa học nhằm bồi dưỡng kiến thức để dạy học xác suất cho giáo viên. Do đó, kết quả nghiên cứu này bước đầu mở ra các hướng phát triển chuyên môn để dạy học hiệu quả chủ đề xác suất có điều kiện cho giáo viên toán thông qua các mô hình cộng đồng giáo viên học tập như nghiên cứu bài học (Nguyen và Tran, 2023) hoặc mô hình quan sát không chứng kiến (O'Leary, 2024).

Kết quả nghiên cứu đã chỉ ra sự tiến triển kiến thức để dạy học xác suất có điều kiện của giáo viên toán thông qua can thiệp thực nghiệm. Tuy nhiên, nghiên cứu cũng chứa đựng những hạn chế về mặt phương pháp liên quan đến tính đại diện của mẫu và độ tin cậy nội tại của thang đo. Các kết quả thống kê chủ yếu dựa trên giá trị trung bình và p-value của kiểm định theo cặp mà chưa có sự đối chiếu giữa nhóm đối chứng với nhóm thực nghiệm. Các chỉ số về mức độ ảnh hưởng chưa được trình bày nên chưa đánh giá được mức độ mạnh/yếu của tác động can thiệp thực nghiệm trong nghiên cứu này. Do đó, các nghiên cứu tiếp theo cần được tiến hành để làm rõ mức độ ảnh hưởng của các can thiệp thực nghiệm lên kiến thức để dạy học xác suất có điều kiện của giáo viên toán.

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ Khoa học và Công nghệ Đại học Huế trong đề tài mã số DHH2024-03-189.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special. *Journal of teacher education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>.
2. Batanero, C. (2022). Training teachers to teach probability: A promising research area. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 22(3), 729-734. <https://doi.org/10.1007/s42330-022-00234-1>.
3. Bộ Giáo dục và Đào tạo (2018). Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán. (Ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26 tháng 12 năm 2018 của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo).
4. Danişman, Ş., & Tanışlı, D. (2017). Examination of mathematics teachers' pedagogical content knowledge of probability. *Malaysian Online Journal of Educational Sciences*, 5(2), 16-34.
5. Díaz, C., Batanero, C., & Contreras, J. M. (2010). Teaching independence and conditional probability. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, 26(2), 149-162.
6. Nguyễn Thị Duyệt (2021). Đánh giá kiến thức của giáo viên toán tương lai để dạy học chủ đề hàm số liên tục. *Tạp chí Giáo dục*, số 506, kì 2, 7/2021.

7. Nguyễn Thị Duyên, Nguyễn Lộc Trường Tài, Nguyễn Thị Mai Thủy (2025). Hiểu nhầm khái niệm của học sinh trong học tập chủ đề “Xác suất có điều kiện” (Toán 12): Một nghiên cứu trường hợp. *Tạp chí Giáo dục*, tập 25, số 12, 6/2025.
8. Estrada, A., Batanero, C., & Díaz, C. (2018). Exploring teachers' attitudes towards probability and its teaching. In *Teaching and learning stochastics: Advances in probability education research* (pp. 313–332). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_18.
9. Groth, R. E. (2010). Teachers' construction of learning environments for conditional probability and independence. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 5(1), 32–35. <https://doi.org/10.29333/iejme/248>.
10. Kwon, M., Thames, M. H., & Pang, J. (2012). To change or not to change: Adapting mathematical knowledge for teaching (MKT) measures for use in Korea. *ZDM*, 44(3), 371–385. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0397-y>.
11. Lien, L. T. B., Minh, T. K. (2018). Vietnamese prospective mathematics teachers' mathematical knowledge for teaching the derivative and implications for teacher preparation programs. In Hsieh, F.-J. (Ed.), *Proceedings of the 8th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education*, Vol. 2, 124–133. Taipei, Taiwan: EARCOME.
12. Nguyen, D. T., & Tran, D. (2023). High school mathematics teachers' changes in beliefs and knowledge during lesson study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 26(6), 809–834. <https://doi.org/10.1007/s10857-022-09547-2>.
13. O'Leary, M. (2024). Rethinking teachers' professional learning through unseen observation. *Professional development in education*, 50(6), 1162–1175. <https://doi.org/10.1080/19415257.2022.2125551>.
14. Phuong, N. T. H., & Minh, T. K. (2018). Prospective mathematics teachers' mathematical knowledge for teaching histograms in statistics. *Vietnam Journal of Education*, 5: 195–201.
15. Qian, H., & Youngs, P. (2016). The effect of teacher education programs on future elementary mathematics teachers' knowledge: a five-country analysis using TEDS-M data. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19(4), 371–396. <https://doi.org/10.1007/s10857-014-9297-0>.
16. Nguyễn Ái Quốc (2022). Dạy học xác suất có điều kiện ở lớp 12 theo Chương trình Giáo dục phổ thông môn toán 2018. *Tạp chí Khoa học Giáo dục Việt Nam*, 18(11), 40–46.

17. Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). Macmillan.
18. Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>.
19. Nguyễn Lộc Trường Tài, Nguyễn Thị Duyệt (2023). Kiến thức nội dung toán để dạy học tích phân của giáo viên toán tương lai. *Tạp chí Giáo dục*, tập 23, số 4, 2/2023.
20. Tversky, A., & Kahneman, D. (1974). Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases: Biases in judgments reveal some heuristics of thinking under uncertainty. *Science*, 185(4157), 1124-1131. <https://doi.org/10.1126/science.185.4157.1124>
21. Zazkis, R., & Mamolo, A. (2011). Reconceptualizing knowledge at the mathematical horizon. *For the Learning of Mathematics*, 31(2), 8-13.